青年数学叢書

擺綫

别尔曼 著

中国青年出版社

序

在这本小册子裏，我們要講一条叫做"擺綫"的重要曲綫和它的一些同類曲綫的性質.

为什麼从許許多多各种各样的曲綫裏，我們單單选取擺綫呢？这有兩个原因.

第一，擺綫对於机械有着非常重要的意义．齒輪的齒的縱斷面，好多類型的偏心輪、偏凸輪以及别的机器零件的輪廓就是这种曲綫．每一个繪圖員都应該熟悉擺綫和擺綫形的曲綫．从它的实用價值來說，擺綫是可以和橢圓、拋物綫、彈道綫等相提並論的.

第二，擺綫形曲綫是試金石，在十七世紀產生並在該世紀末形成了微積分的那种新的計算方法和新的數学思想，在这种試金石上受到了考驗．現在每一个中学生所熟知的人物，像伽利略、托里拆利和惠更斯，都曾經研究过这种重要的曲綫.

書裏的敍述非常淺顯，每一个高中学生、技術人員、大学生和大多數的熟練工人都可以了解．但是，要使很多人覺得容易接受，敍述就必然有些不够嚴正，也就不能像數学教科書那样簡潔扼要了.

在这裏，自然会發生一个問題：既然擺綫的性質可以非常簡短地用高等數学——微積分來說明，为什麼还要用冗長而

又不能完全使人信服的初等數学方法來敍述呢？人們可能会說："对那些不預备学高等數学的人，擺綫的性質本來未必会使他們感到兴趣；而那些对精密科学和技術有兴趣的人，等个兩三年進了專門学校或大学就可以学到了。"

对这个問題，我們可以这样回答：有許多部門的人，他們对於跟机械有關係的科学問題很有兴趣，但是並不懂高等數学，对於这些人來說，也許就很想懂得对机械这样重要的这种曲綫的性質。而对於那些準备將來学習高等數学的人，先在中学裏熟悉了那些事实、那些方法，以及曾經为高等數学的產生出过力的那些科学家，正可以使他們將來能够更好地去領会高等數学中的观念和方法，这也是有好处的。

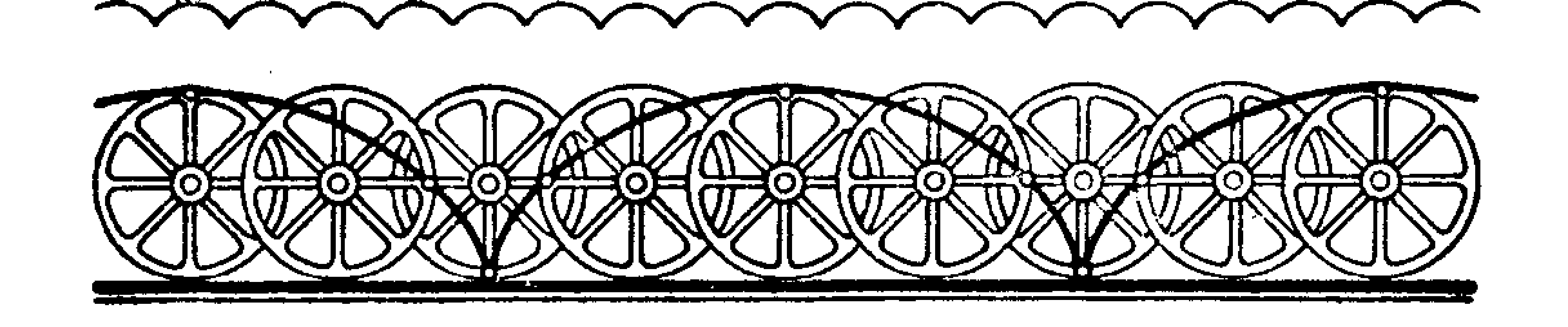
我們要預先告訴技術青年們："擺綫"是一本數学書而不是技術書，是一本讀物而不是教本。書裏面对机械的应用只是粗具輪廓。但是，它对於技術人員也許不無用处：本來，沒有理論的实踐就是盲目的实踐。基本上說，这本書是为數学愛好者和中学裏(高年級的)的數学小組寫的。

許多人对數学都怀着敬意，但是總歸不大願意跟它接近。假使这本小冊子对消除这种奇怪的偏見有些帮助的話，即使帮助很少，作者也將引为荣幸。

对促進本書的寫作和出版的所有人士，致以衷心的謝意。

作　者

目　次



第 一 章
車輪產生出來的曲綫

笨熊騎在自行車上走路……

丘科夫斯基

兩个騎自行車人的談話

我的朋友——九年級学生㊀瓦夏和物理系学生謝尔該，是自行車运動的爱好者．有一次，他們兜風回來，曾經進行这样的談話．

謝尔該： 瓦夏，你想，自行車是不是会把附在它後輪上的泥漿甩開來濺在騎車人的身上？

瓦夏： 当然啦！在稀泥道上偶尔降低速度的時候，那些飛濺的泥點就常常落到背上．

謝尔該： 为什麼会这样呢？这事你想过嗎？据你的意見，从車輪边緣上飛開來的泥漿应該是怎样動法的？朝什麼方向動的？

㊀ 相当于我國的高中二年級学生。——譯者註

瓦夏： 讓我想想．唉！想不出來……

謝尔該： 那末讓我來提醒你吧．假使任一个質點被迫沿着曲綫运動，但是突然可以自由运動了，那末它依照慣性，就会保持着“解除束縛”那一瞬間具有的速度的大小和方向，依着运動軌綫的切綫方向运动．明白嗎？

瓦夏： 不完全明白．我忘記了軌綫是怎样一回事．

謝尔該： 質點运動的曲綫，就叫軌綫．

瓦夏： 对！对！現在完全明白了．

謝尔該： 你試把这条規律运用到我們的情况看．

瓦夏： 为什麼？

謝尔該： 你会得出意外的結果．

瓦夏： 好吧．（一边在想．）假設小泥點走的路綫是这样子的，（瓦夏当場就画了一張画，样子像我們的圖1，只是他画的自行車比圖上的要坏得很多．）那末，从A點飛出來的小泥點就要依着車輪边緣的切綫方向运動，因而就画出这样一条

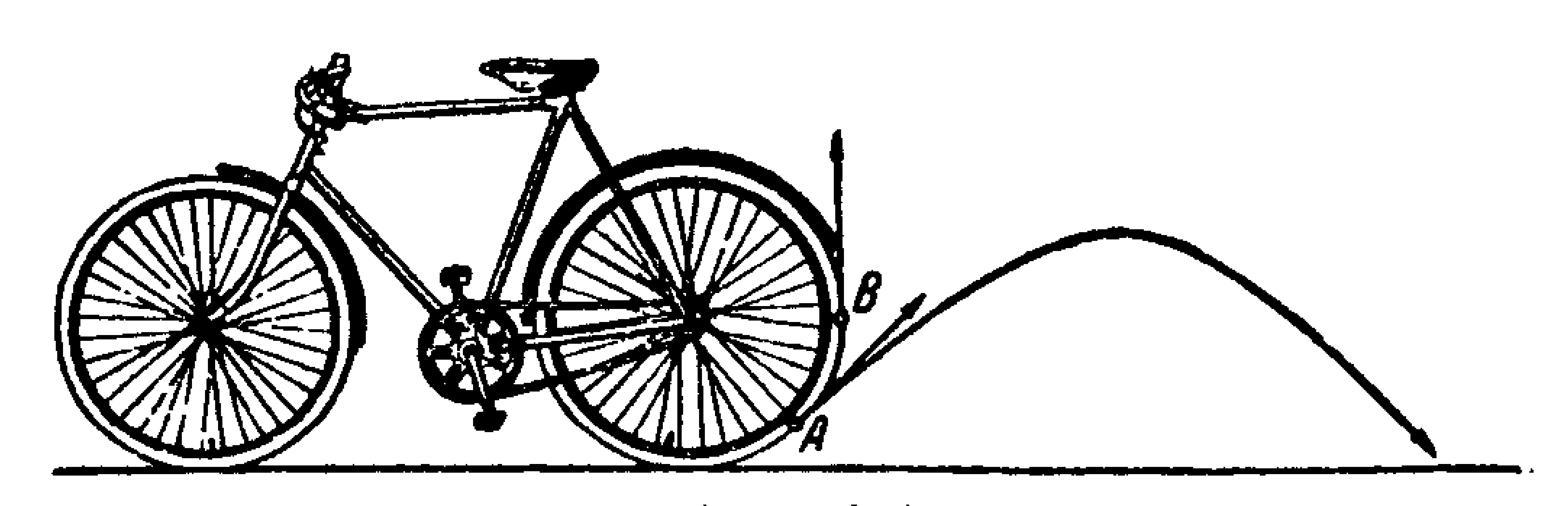


圖 1. 对嗎？

曲綫（他指了一下）．若是把石子斜斜地扔出去，它也照着同这一样的路綫飛出去．

謝尔該： 这条曲綫叫做**拋物綫**．

瓦夏（接下去）：即使泥漿在車輪上黏得牢一些，一直升高到B點（圖1）才甩出來，也不会赶上騎車人：因为它將要垂直向上运動．而再上面一點的泥漿就不会往上甩了．有遮泥板把它擋住了．

謝尔該：假使騎車人减低速度，又会怎麼样？

瓦夏：騎車人即使完全停下來，泥漿無論怎样總濺不到他……这个結論多荒唐！泥漿不是明明会落到背上來嗎！

謝尔該：我說过，要得出意外的結果來的！

瓦夏：究竟是怎麼回事兒？我弄不明白……

謝尔該：問題完全就在你判断得不正確．你更仔細地看一下車輪的运動（圖2）．假設車輪是向右轉動的．（謝尔該画了一个車輪，見圖2的左边一个，又画了一个繞軸心向右轉的箭头v．）我們假定騎車人的速度是v公尺/秒，車輪的半徑是r公尺．当車輪的軸心向前走的距离等於車輪的圓周長，也就是等於$2\pi r$的時候，車輪才整个轉了一周（圖2）．我們用x來代表車輪轉一周需要花的時間．於是得：

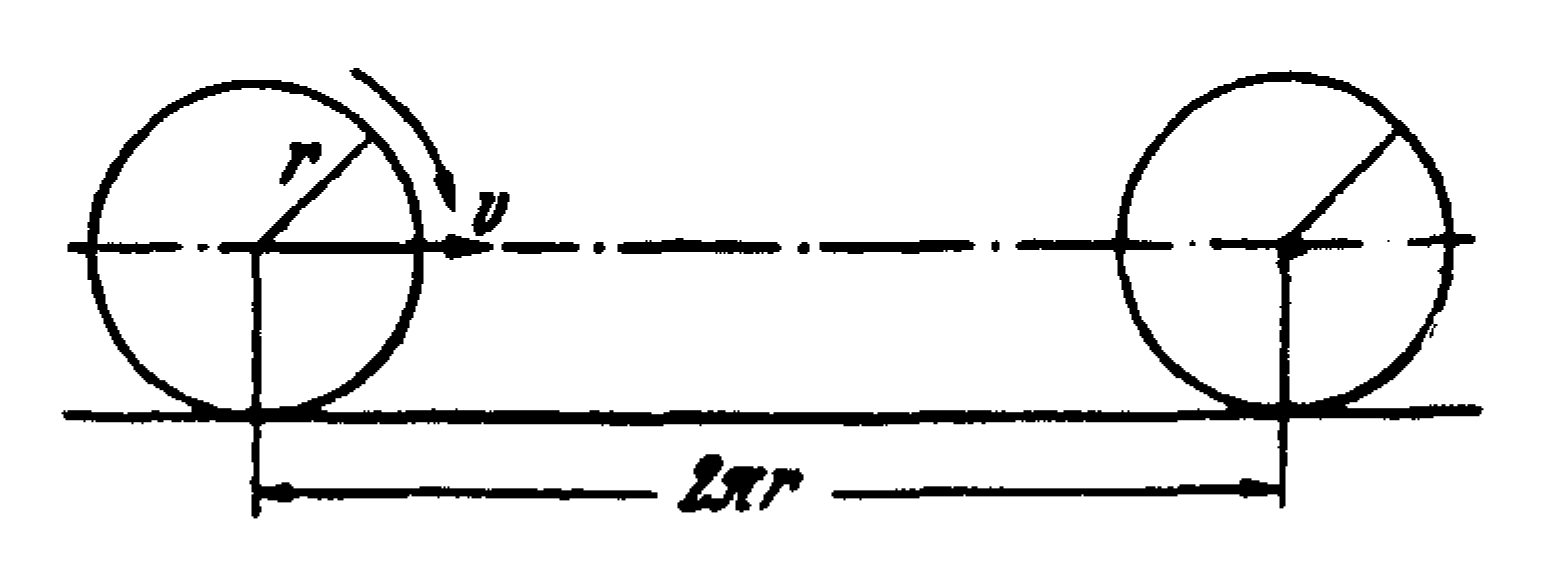


圖2． 自行車輪的複合运動

車輪軸心前進$2\pi r$公尺需要花時間x秒，

車輪軸心前進v公尺需要花時間1秒．

因此：

$$x=\frac{2\pi r}{v}\text{秒}.$$

这样說來，車輪轉一周要花 $\frac{2\pi r}{v}$ 秒；那末它一秒鐘轉幾周呢？

瓦夏： 讓我自己來算。設 y 是車輪每秒鐘轉的周數。現在要列一个比例式。我們这样來看：

車輪轉一周要花 $\frac{2\pi r}{v}$ 秒，

它轉 y 周要花 1 秒。

我們就得到比例式：

$$1 : y = \frac{2\pi r}{v} : 1.$$

对吧？

謝尔該： 对！

瓦夏： 那就是說，每秒鐘轉 $y=\frac{v}{2\pi r}$ 周！

謝尔該： 不錯！我們現在可以看出，自行車車輪做的是複合运動：它以 v 公尺/秒的勻速度向前進，而同時又在做每秒 $\frac{v}{2\pi r}$ 周的轉動。來，記記看，假使有一點同時在做兩种运動，这一點的速度怎样求？

瓦夏： 这个我知道！用平行四边形的方法把兩种运動的速度合起來。

謝尔該： 对！我們現在來看車輪边緣上某一點 A 在某一瞬間的运動（圖 3）。这一點一方面在做向前推進的运動，——也就是說，它具有水平速度 v 公尺/秒。但是这同一點也在做旋轉运動，它本身还具有第二个速度。这个速度怎样算法

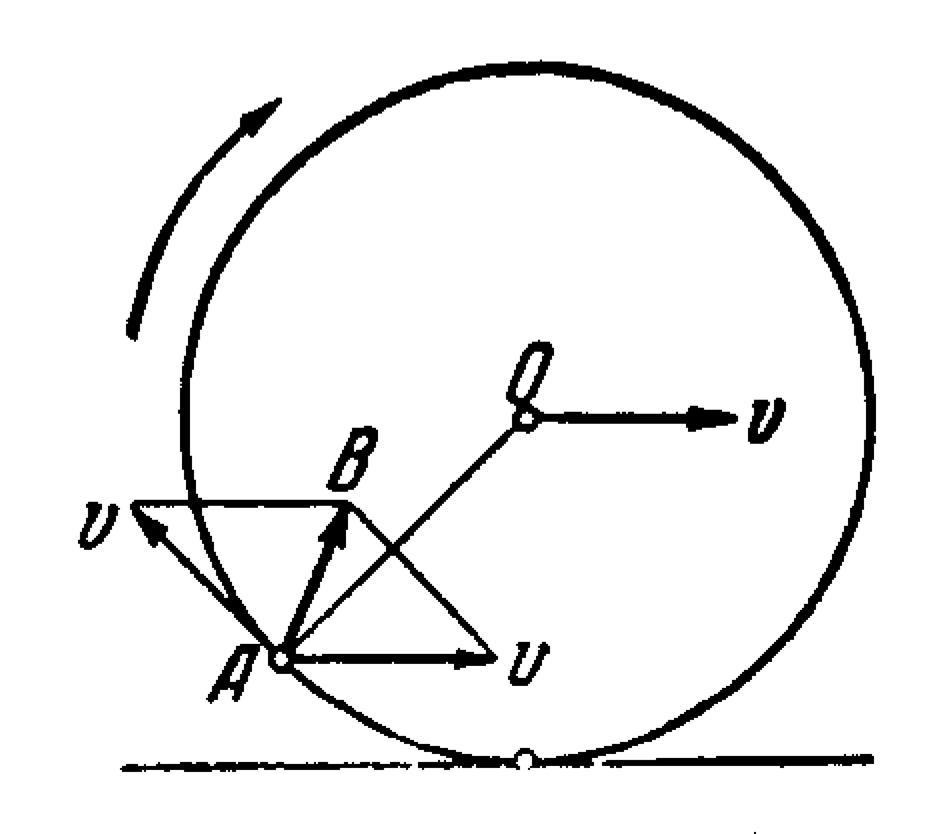


圖 3. 前進运動和旋轉运動速度的合成

呢？

瓦夏： 我現在就來算．在一秒鐘裏，車輪轉 $\frac{v}{2\pi r}$ 周．車輪轉一周，边緣上的 A 點走的路程等於輪周的長度，也就是 $2\pi r$ 公尺．这就是說，在一秒鐘裏，車輪轉 $\frac{v}{2\pi r}$ 周，A 點就走 $\frac{v}{2\pi r}\cdot 2\pi r=v$ 公尺．看來这第二个速度也是 v 公尺/秒．

謝尔該： 正是这样．在車輪轉動的時候，边緣上这點的速度也等於 v 公尺/秒；但是前進运動的速度是沿着水平方向的，而这第二个速度却是沿着車輪边緣的切綫方向的．合起來的速度就得沿着这个等边平行四边形的对角綫（也就是菱形的对角綫）的方向，像圖 3 指示的那样（箭头 AB）．清楚嗎？

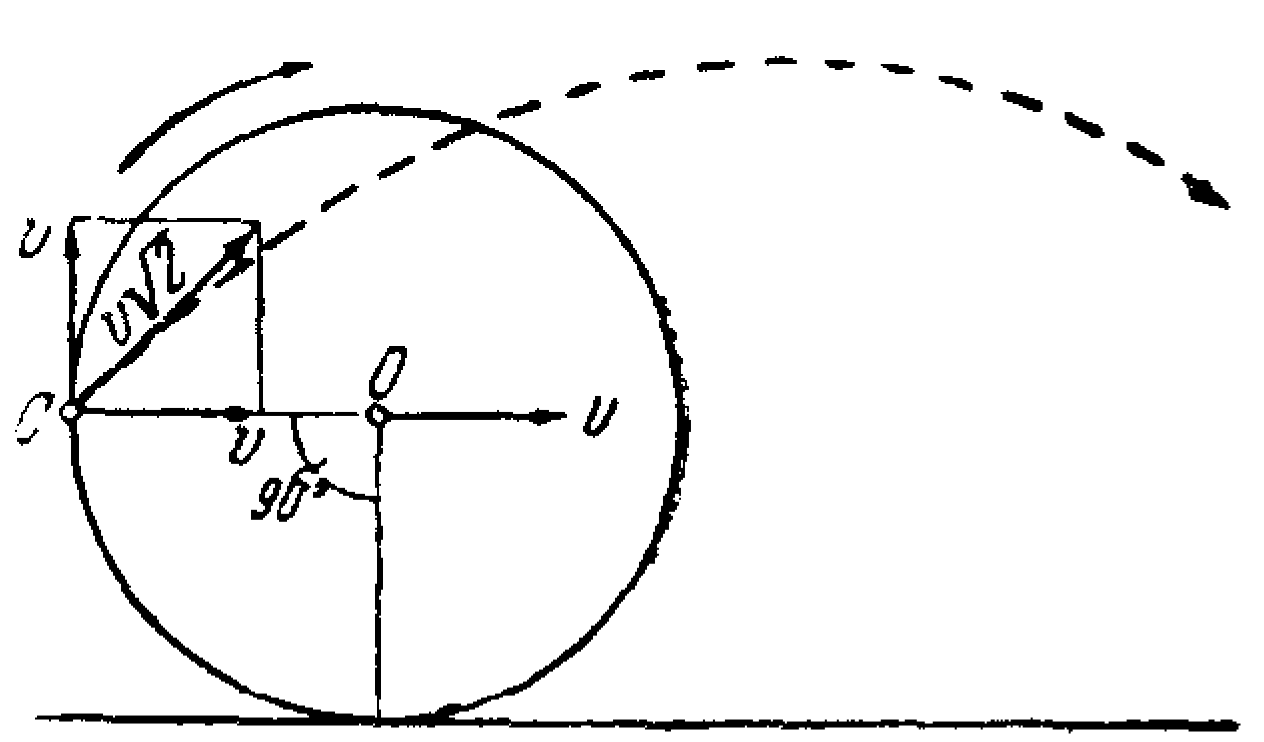


圖 4． 从車輪上跳出的泥點所經的路徑

瓦夏： 清楚了．

謝尔該： 現在，瓦夏，你來看一下圖 4 上到達位置 C 的泥漿．它的速度是由兩个速度合成的，一个是水平速度 v，另一个是豎直速度，也等於 v．合成的速度就等於 $v\sqrt{2}$（按照畢達哥拉斯定理㊀），而它的方向和水平方向成 45° 的仰角．

泥漿點就像跟水平方向成 45° 角向上拋出去的石子一样

㊀ 这条定理，在歐洲相傳是希臘的幾何学家畢達哥拉斯首先發現的，所以称为畢達哥拉斯定理；但是在我國古算書"周髀算經"中，商高就已經知道了"勾方加股方，開方後得弦"，所以我們通常把它称为"勾股弦定理"．——譯者註

运動（見圖 4 上用虛綫画出的拋物綫）. 根据慣性，它仍然繼續保持着水平方向的分速度 v㊀. 它是不是会濺到騎車人身上呢?

瓦夏: 不会.

謝尔該: 如果騎車人降低了速度呢?

瓦夏: 这時候泥漿點就落到他背上來了!

謝尔該: 事实上是这样的嗎?

瓦夏: 是的. 三号那天，我騎車回來就濺了一背脊泥.

謝尔該: 这就是說，你全明白了?

瓦夏(想了一下): 不，还沒有呢! 我現在还很糊塗! 在圖 4 上可以淸楚地看到，速度的方向並不是沿着車輪边緣的切綫方向，而是要偏一些的. 起初我們就說过，泥漿點的速度必然是沿着軌綫的切綫方向的. 你自己曾經說过这話.

謝尔該: 是什麼东西的运動軌綫呢?

瓦夏: 当然是車輪边緣上我們說的那一點.

謝尔該: 完全对! 它也就是沿着这条軌綫的切綫方向.

瓦夏: 我不懂. 依我看，圖 3 和圖 4 就跟这件事發生矛盾.

謝尔該: 一點也不. 你想想看.

現在我們跟謝尔該和瓦夏一起來想一下，这个表面上的矛盾有什麼根据. 我們來想一下，当自行車运動時，車輪边緣上的每一个點画出什麼样的軌綫（什麼样的曲綫）. 用幾何学

㊀ 为了使計算簡單，我們沒有把空气的阻力考慮進去. 这並不会使結果过分不正確.

的語言來說，——我們要弄清楚，在一个沿直綫滾動但無滑動的圓上面的每一个點，画出什麼样的曲綫．泥漿點不是沿着車輪边緣的切綫方向运動，而正是沿着这一条曲綫的切綫方向运動的．

擺綫究竟是什麼？

自行車車輪的軸心沿着直綫在均匀地运動．車輪本身在均匀地轉動．这時候，車輪边緣上每一个點画出什麼样的曲綫呢？如果軸心不動，那麼車輪上所有的點画的都是圓．但是軸心也在运動，因而相应的圓就"擴展起來"，"拉長起來"了．我們現在來研究沿直綫滾動但無滑動的圓上面的點画出的曲綫．这种曲綫就叫做**擺綫**．

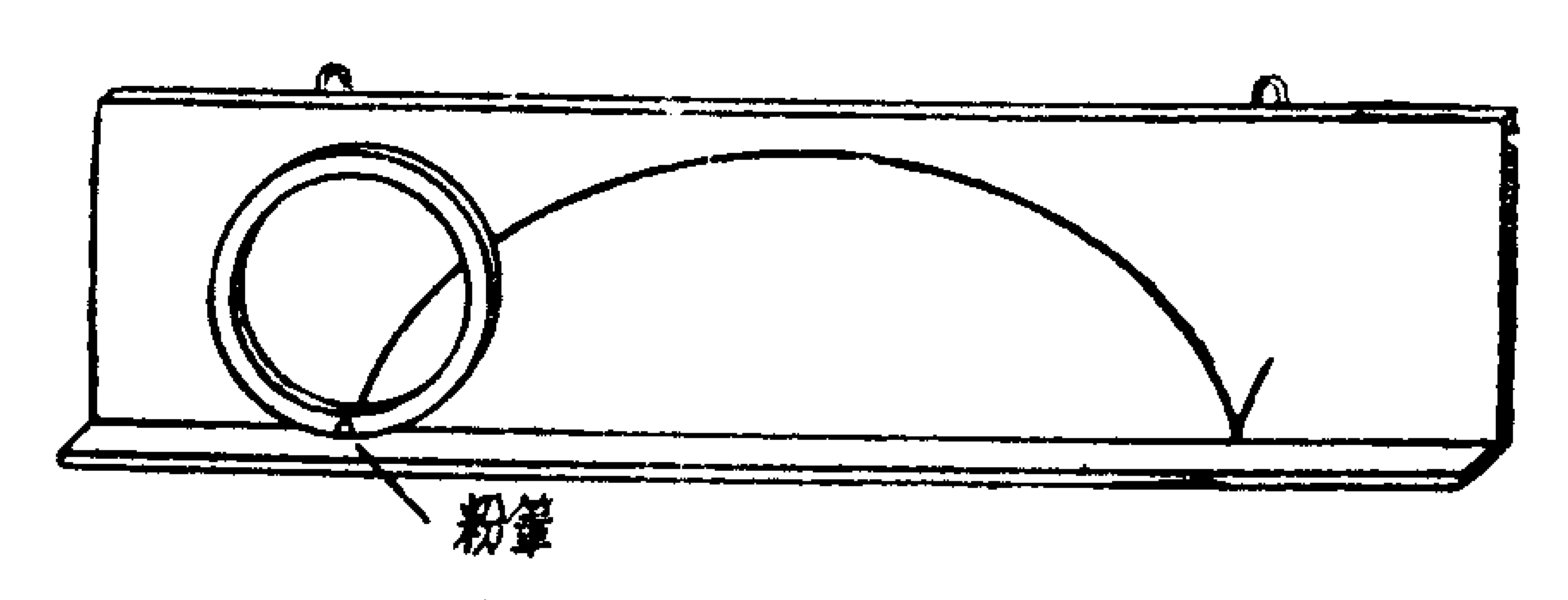


圖 5．說明擺綫的教学用品

我們先來做一个試驗．我們从膠合板上鋸下或者从厚紙板上剪下一个圓片，在这个圓片的边上用錐子刺一个小孔，然後在小孔內放一小段筆鉛．把一支尺放在一張紙上，我們就拿这小圓片緊緊地压在紙上，然後使它沿着这支尺滾動．那一小段筆鉛就会画出我們的擺綫．圖 5 上画的是一种教学用品，在課堂上講到擺綫的時候，就可以用它來帮助說明．它是

一塊可以竪直掛起來的黑板，下边安着一条水平的边板．沿这条边板滾動着一个厚实的鉄环，很像小孩子們喜欢"滾玩"的那种鉄环．鉄环上有一个小孔，这裏可以放一小段粉筆．当鉄环沿边板滾動的時候，粉筆就画出一条擺綫．在圖 5 上可以看到这条美麗的曲綫的形狀．

現在我們來"一點一點"地画出这条擺綫來．我們要把这条曲綫作得佷可能精確．引直綫 AB（圖 6），在直綫左端画一个半徑 a 的圓，跟直綫 AB 在 K 點相切．最簡單的方法是这样：在跟直綫 AB 相距 a 的地方引一条直綫 MP，平行於 AB（这条直綫对我們來說是必需的）．在离綫段 MP 左端不远的地方标出一點 O，用 O 作圓心、用 a 作半徑画一个圓．这个圓一定跟直綫 AB 相切．切點用字母 K 标出．

現在，我們在直綫 AB 上从 K 點往右截取一段綫段，長度等於半徑 a 的圓周．大家知道，要用圓規和直尺把这綫段精確地做出來是不可能的．只好用近似作圖．如果一个圓的

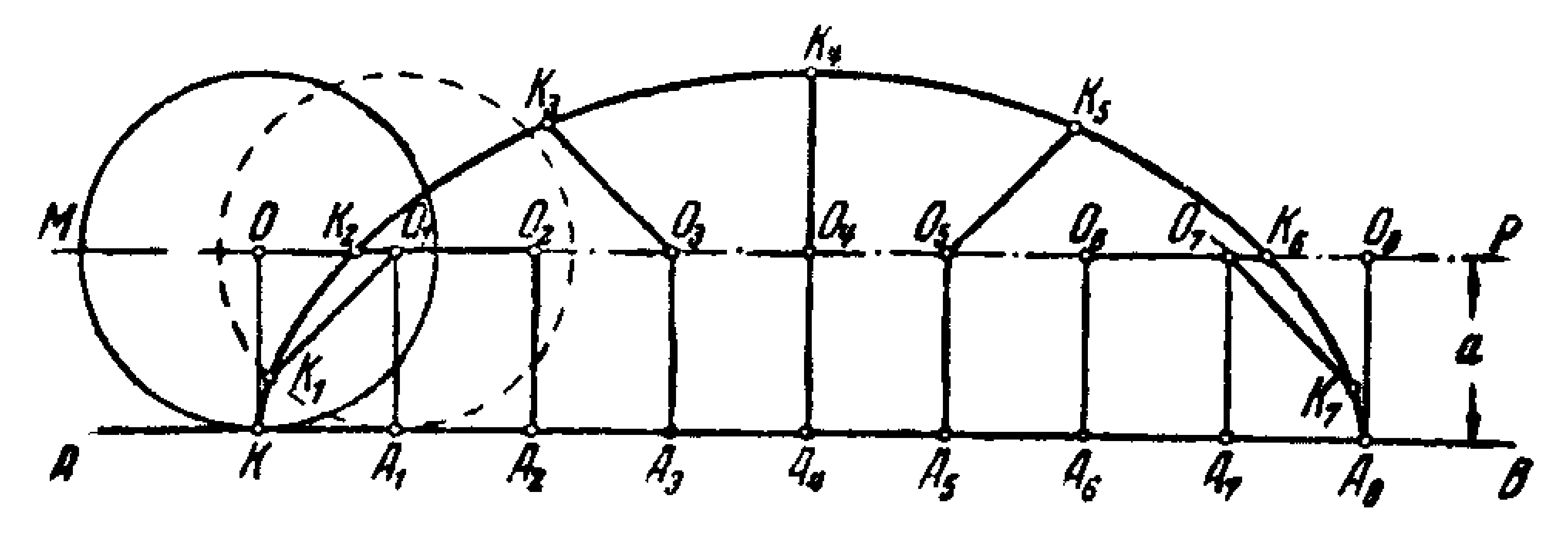


圖 6． 一點一點地來画擺綫

半徑等於 a，那末它圓周的長就是 $2\pi a$，也就是說接近於 $6\frac{2}{7}a$ 或 $6.28a$．假設我們是在离直綫 AB 4 厘米的地方引直綫 MP 的．这就是說，我們具有 $a=4$．因此，我們必須在 AB 上截

取長等於 4×6.28，也就是 25.1 厘米的綫段㊀．这綫段的末端用 A_8 标出．

現在我們設想，剛才所作的圓沿着直綫 AB 在滾動．它的圓心沿着直綫 MP 移動．截取綫段 OO_8 等於 KA_8，把 OO_8 分成八等分．點 O_1（第一分點）处在相当於圓周長 $\frac{1}{8}$ 的地方．当圓心 O 移動到 O_1 時，半徑 OK 轉動了 $360°\div 8=45°$．作角 $A_1O_1K_1$ 等於 $45°$，並作綫段 O_1K_1 等於 OK．點 K_1 一定在擺綫上．用虛綫画出在圓周 $\frac{1}{8}$ 相应位置上的圓．

現在我們來看看轉了 $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ 圓周的圓心 O_2．我們完全照上面說的情形一样來作圖，只是角 $A_2O_2K_2$ 等於 $2\cdot\frac{360°}{8}=90°$．我們得到擺綫上的點 K_2．为了得到圓心在 O_3 時擺綫上的點，我們作等於 $3\times\frac{360°}{8}=135°$ 的角，並作綫段 O_3K_3 等於 OK．

點 K_4, K_5, K_6, K_7 的作法就很清楚了．顯而易見，點 K_8 和點 A_8 重合．把所有用这种方法得到的點用一根平滑曲綫（隨手）連起來，我們就得到了一条擺綫．假使得到的曲綫顯得不够平滑，讀者可以自己考慮怎样來作出中間的那些點．比如說，从一開始就可以把基本綫段（滾動圓的周長）不分成



圖 7．擺綫的一般形狀

㊀ 書裏的圖 6 是按比例 1：4 画的——在圖上 $a=1$ 厘米．我們建議讀者画一个更大一些的圖，像正文裏說的那样（$a=4$ 厘米）．

八分，而分成 12 分．这样就不用作等於 45°，90°，135° 等等的角，应該作等於 30°，60°，90°，120° 等等的角了．

我們建議讀者來練習作各种大小（半徑 a 等於各种數值）的擺綫，並且用各种數目來劃分輔助分點．

我們要注意，和直綫一样，我們要想像擺綫是一条無限曲綫．我們假定，这个圓（它叫做母圓）沿着直綫（準綫）滚到無限远．这時候就得到一条由無限多个拱弧組成的曲綫（在圖 7 上我們画了兩个完全的拱弧和第三个拱弧的一部分）．一个个的拱弧都在具有公切綫（竪直的）的那种點（尖端）連接起來．这种點叫做擺綫的**歧點**（圖 8）．它們就对应於在滚動的圓上我們所注意的描出擺綫那一點的最低位置．最高的位置恰好在兩个歧點的中間；这些"最高的"點就叫做擺綫的**頂**（在圖 6 上，擺綫的一个頂是在點 K_4；你試指出圖 7 上所有的頂）．兩个相鄰的歧點中間的直綫段，長等於 $2\pi a$，叫做擺綫的**底**（更精確些說，是擺綫的一个拱弧的底）．

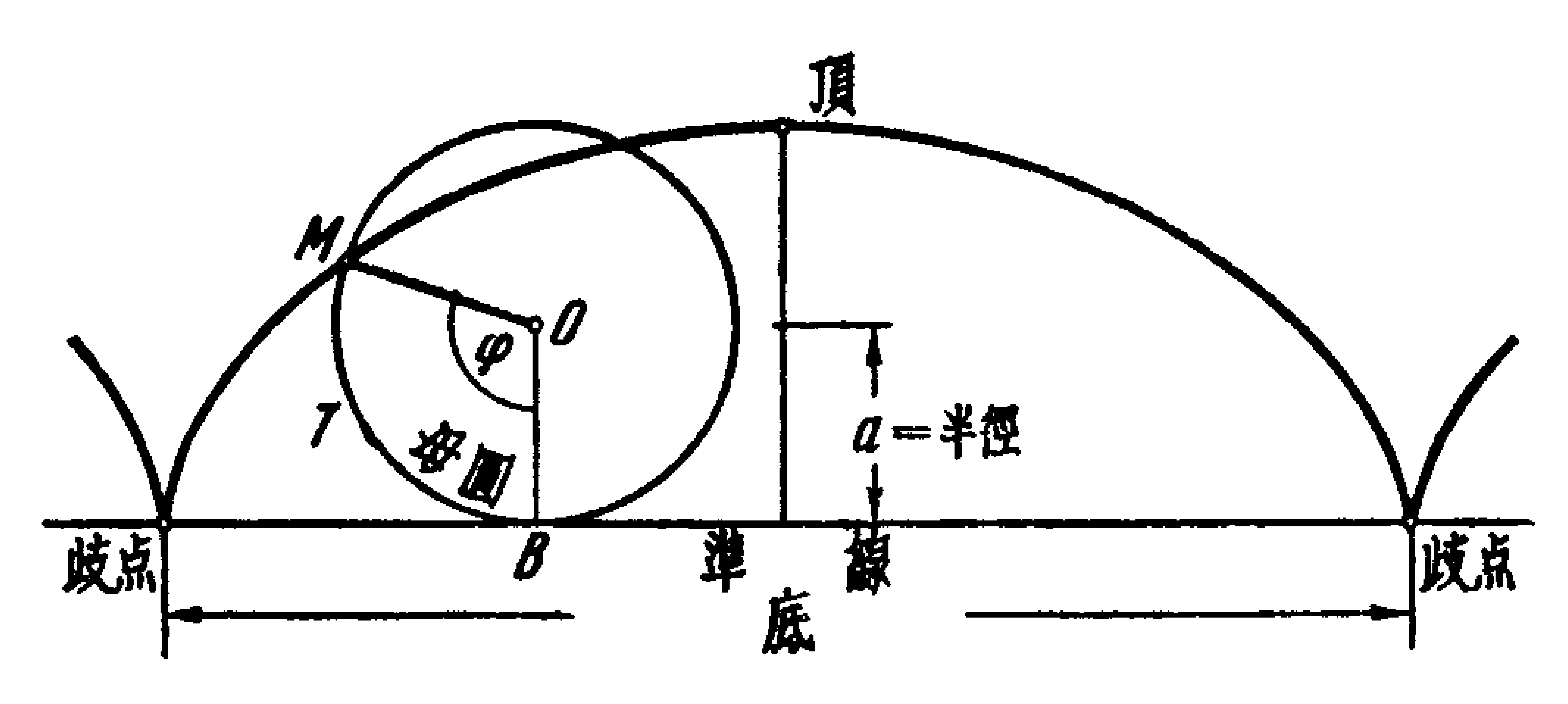


圖 8．擺綫的各个要素（画的是一个拱弧）

在研究擺綫的時候到底会發生些什麼問題呢？首先，必

須給它一个跟力学無關的純粹的幾何定义．其次，必須研究它的性質，学会作它的切綫，計算它的弧長、它的拱弧跟底所圍的面積、它的拱弧繞準綫旋轉所成的旋轉体的体積．順便我們还研究擺綫的同族曲綫，熟悉它們純粹在幾何学上的应用，以及它們在隣近部門的应用．但是在談到所有这些之前，我們先來作一个簡短的歷史介紹．

簡短的歷史介紹

著名的意大利天文学家、物理学家和啓蒙运動者伽利略（1564–1642）是開始研究擺綫的第一人．他又創造了“擺綫”这个名称，意思就是：“联想到圓”的曲綫．伽利略本人關於擺綫沒有寫过什麽，但是他的学生和繼承者維維安尼、托里拆利等人却曾經提到他在这方面的工作．托里拆利是著名的物理学家，气压計的發明者，他对於數学也曾經花了不少功夫．在文藝復兴時代，还沒有狹隘的專門学者．有天才的人旣研究哲学，也研究物理学和數学，並且处处得到了有趣的結果和做出了出色的發明．法國人从事擺綫的研究比意大利人要稍稍晚一點．1634 年，著名的衡量制發明者罗別尔瓦里算出了擺綫的拱弧和它的底所圍的面積．關於这些事情的詳情，以及另外一些跟擺綫有關的学者們的發現，我們放到後面去細談．現在我們要花一點篇幅來談談可以說是擺綫的前期歷史，就是古代哲人們的一些値得注意的研究；我們可以看到，这些研究是对擺綫很有關係的．

偉大的古代哲学家、“邏輯学之父”、斯塔吉尔人亞里士多

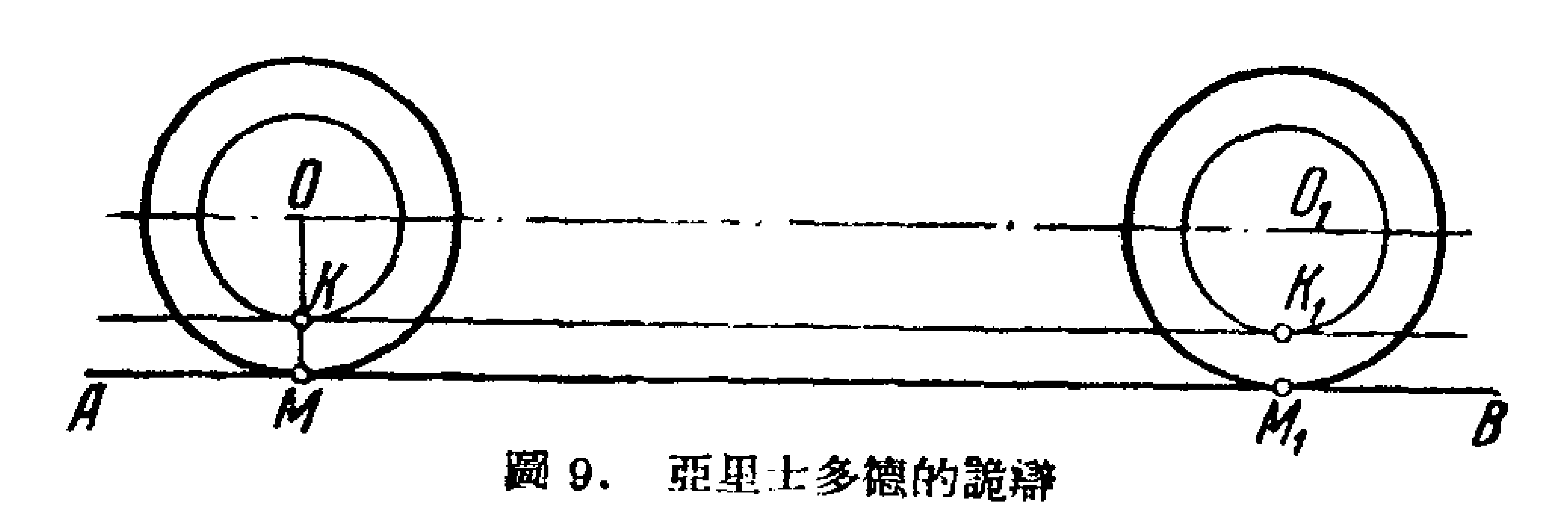


圖 9. 亞里士多德的詭辯

德（公元前 384–322），在研究运動概念的邏輯基礎時，帶便研究出了下面的詭辯。設圖 9 上用粗綫画的圓沿直綫 AB 滾動。当这个圓滾轉了一周，點 M 就回到直綫 AB 上，並到達位置 M_1。同時，正像我們所知道的那样，綫段 MM_1 等於“粗綫”圓的圓周長。我們現在來看用細綫画的、圓心也在 O 的圓。当點 M 到達位置 M_1 時，这个小圓也滾轉了一周，它上面的點 K 到達了位置 K_1。同時，在每一瞬間，小圓上總有一个唯一的點跟綫段 KK_1 上某一个唯一的點联結在一起。圓周上的每一點在綫段上都有唯一的对应點，而綫段上的每一點在兩个圓周上也各有唯一的对应點。因此自然就会得出結論：小的“細綫”圓的圓周長度等於綫段 $KK_1=MM_1$，也就是等於大（“粗綫”）圓圓周的長度。於是，不同半徑的圓都具有同一長度的圓周！这就是亞里士多德的詭辯。

这裏的錯誤如下。从半徑 OK 的圓周上的每一點在綫段 KK_1 上都有唯一的对应點，決不能推断出这个圓周的長等於 KK_1。例如圖 10，綫段 AB 上的各點，我們可以用經过 D 點的射綫，使它們跟有 AB 兩倍長的綫段 CE 上的點一一对应，但是決沒有一个人想到要坚持綫段 AB 跟 CE 具有同样的長度！这不僅对直綫綫段是这样，而且对曲綫也是这样。把

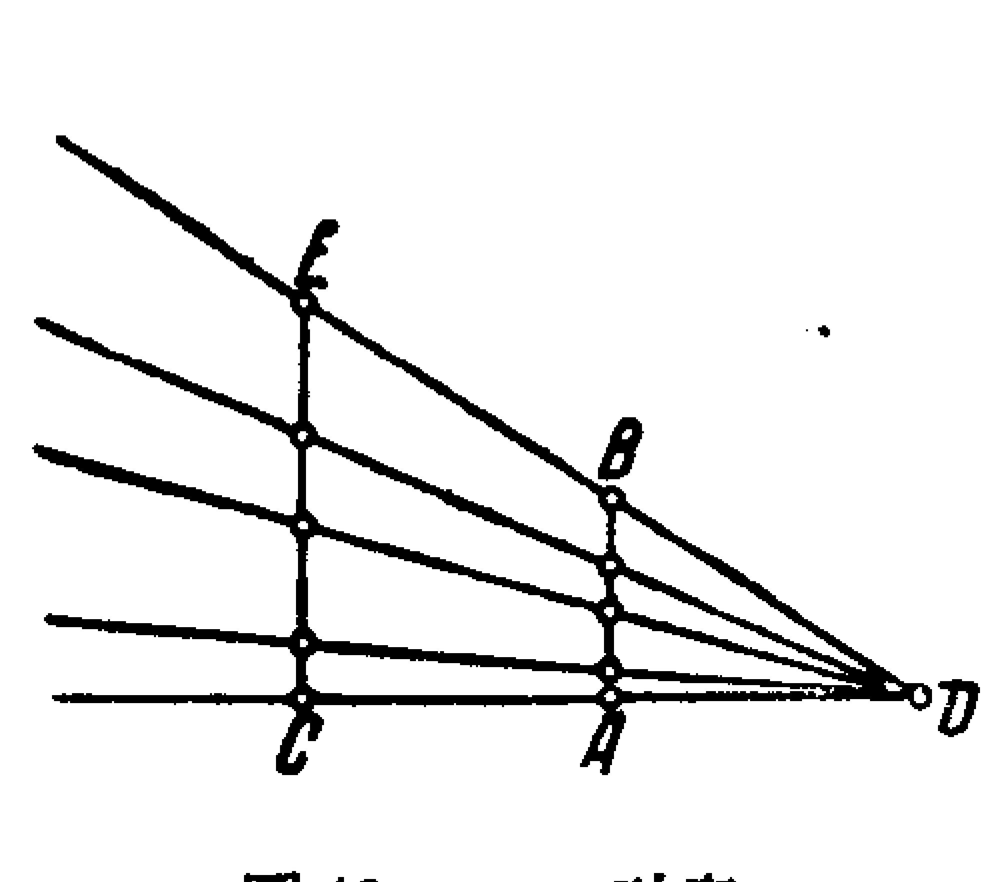
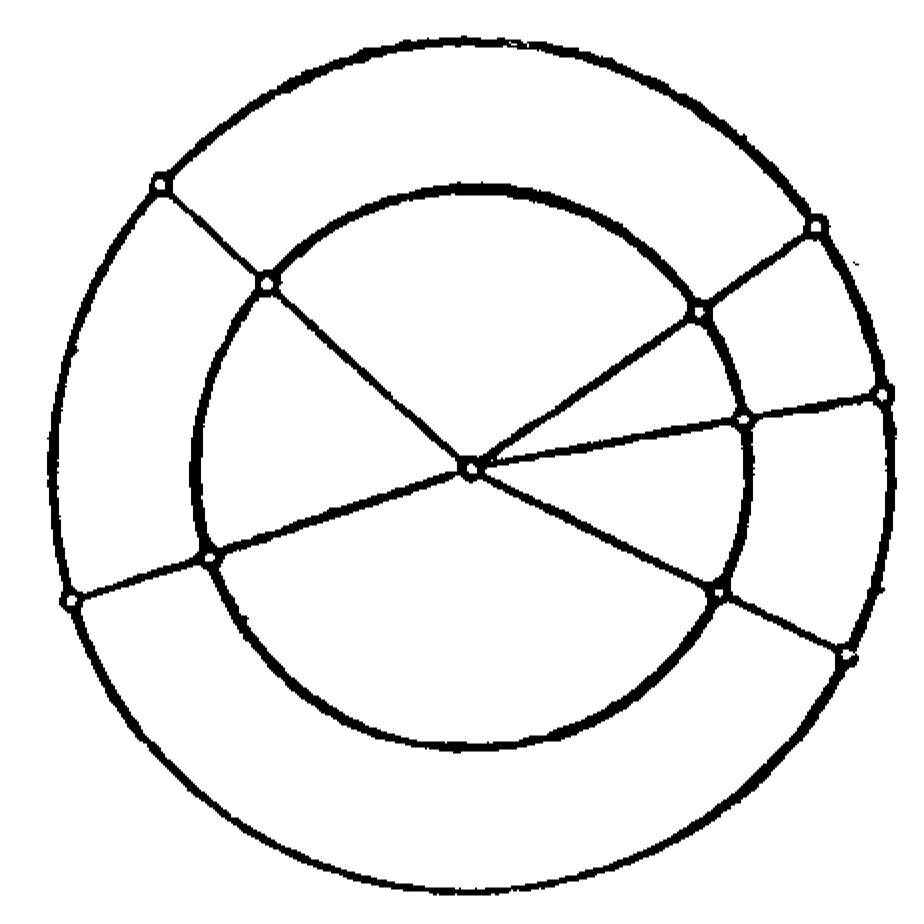


圖 10. 一一对应


圖 11. 針对亞里士多德詭辯

亞里士多德的詭辯敍述得直截些、明顯些：我們來討論兩个同心圓(圖 11)．在兩个圓上有"同样多"的點：在圖 11 上，对应的點是用直綫（半徑）連接起來了．可是誰也不会硬說，这兩个圓的圓周一样長．

試比較圖 6 和圖 9，我們就可以得出一个非常重要的結論．圓沿直綫滾動，可以有兩种方式．有一种方式具有这样的性質：像在圖 6 上，任何一刻（当母圓在任一个位置時）弧 K_1A_1 的長總歸等於綫段 KA_1 的長．圖 9 上画的是另一种方式，在这裏，半徑 OK 的小圓沿直綫 KK_1 滾動，是不具备这种性質的．在前一种情形，通常就說圓沿直綫無滑動地滾動．在後一种情形，通常就說圓不僅沿直綫 AB 滾動，而且还滑動．要得到擺綫，就应該观察無滑動的滾動．下面我們要討論的，就是無滑動滾動時得到的曲綫．

在伽利略發現擺綫以前 1900 年，亞里士多德就已經观察过这种运動了；但是亞里士多德对於滾動的圓周上的點画出的曲綫，並不發生兴趣．比他晚一些的卓越的天文学家托勒

密（公元前二世紀），曾經接觸过一"族"跟擺綫非常隣近的曲綫（所謂"外擺綫"）.

現在我們來看看行星的运動，比如火星在天空中的运動．当地球和火星处在像圖 12 所示的位置，地球从 3 移到 $3'$，火星

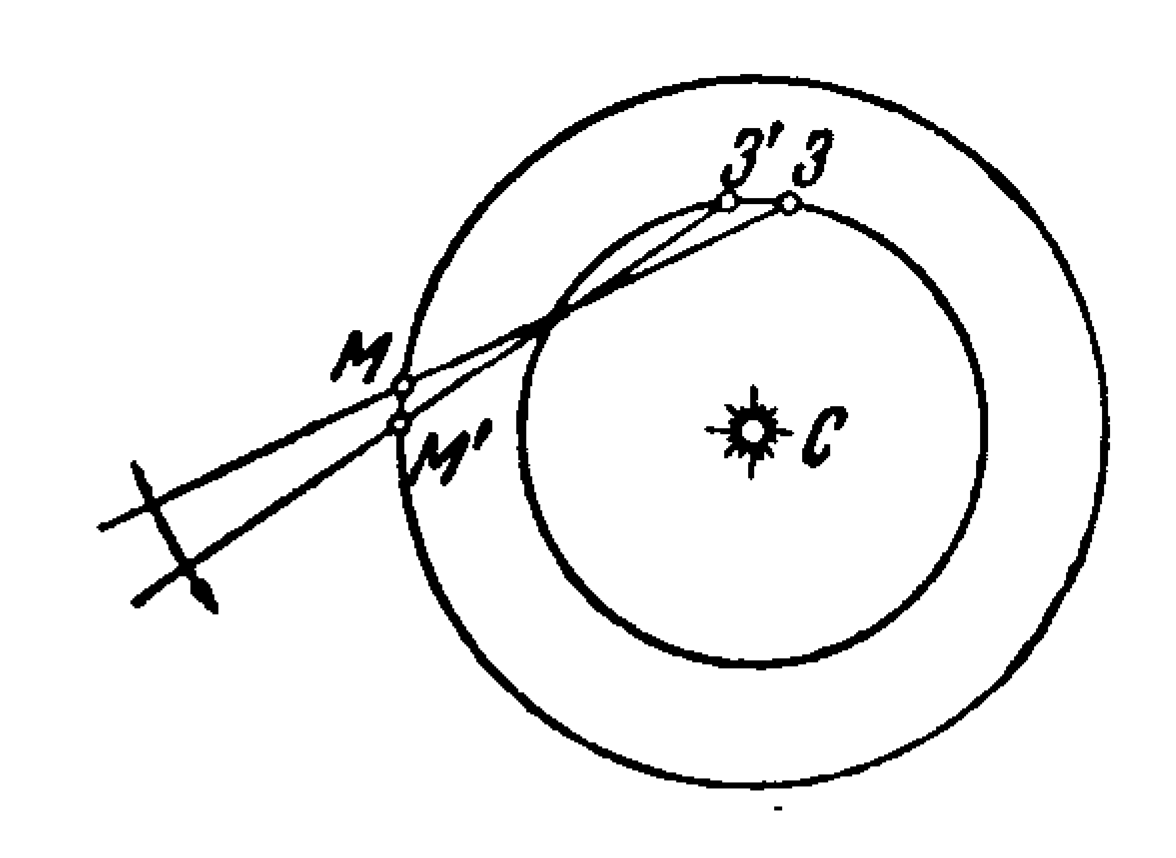


圖 12. 火星的直綫运動

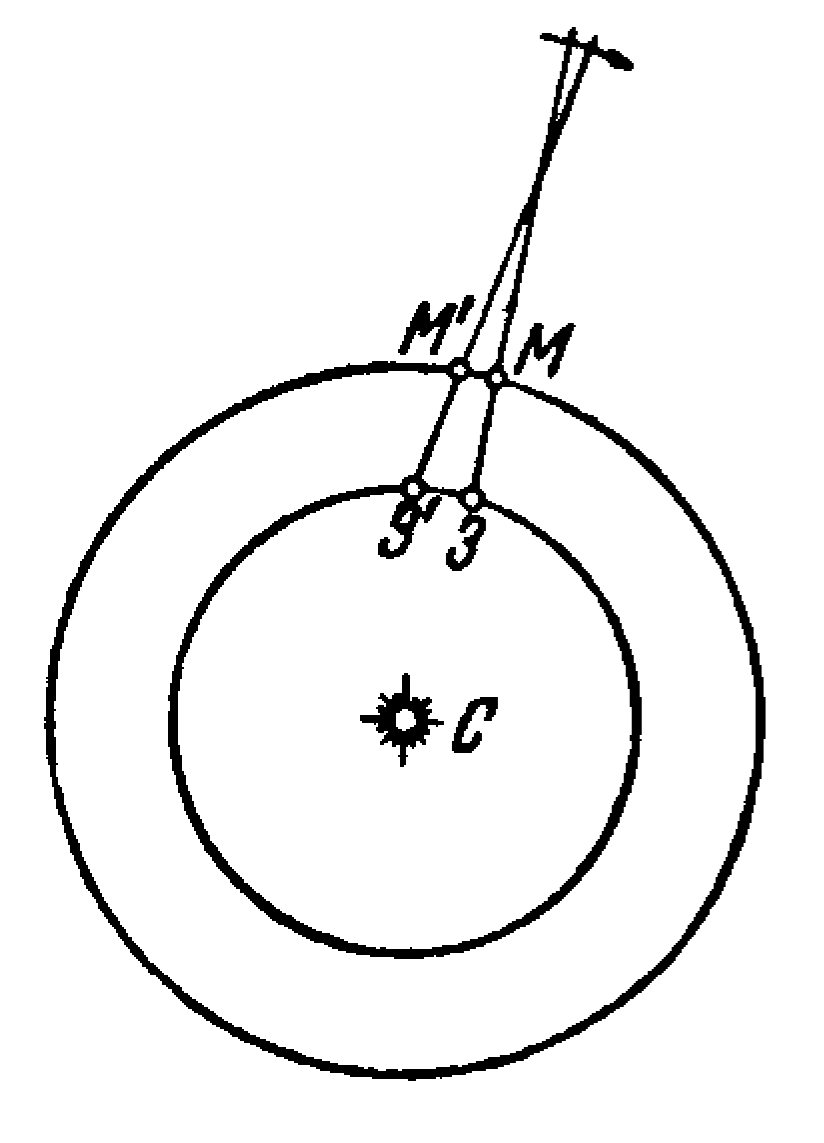


圖 13. 火星的後退运動

却从 M 移到 M'，那末在地球上的人們就会以为火星是在星星中間作反時針方向运動．通常也就是这样來看火星的运動的．但是处在相衝地位時（圖 13），当地球从 3 移到 $3'$，火星却从 M 移到 M'，看來火星好像在作順時針方向的运動．火星的这一"後退"运動，远在太古時代就已經被天文学家們知道了．

托勒密也知道这一點．但是他認为地球是宇宙的不動中心，又認为一切行星都在繞地球作匀速运動．在他那个時代，如果認为星体是在作非环狀的和变速的运動，就会被人看作大逆不道．究竟怎样使匀速环狀运動和那有時（接近衝的時刻）可能观察到的行星"後退"运動的事实协調起來呢？机智的托勒密找到了下面的一条出路．

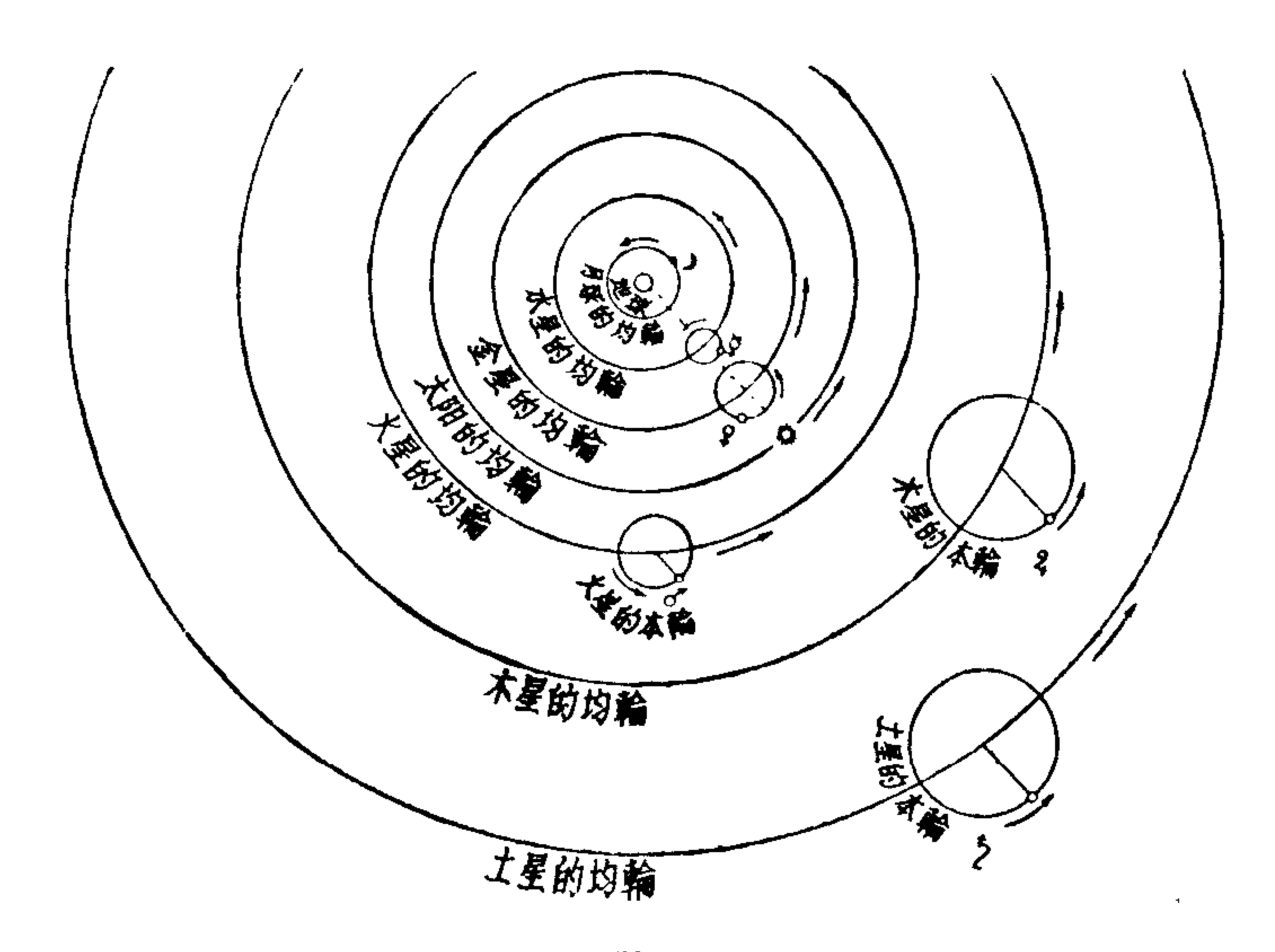


圖 14. 托勒密的宇宙系

他想像，每一个行星都沿着一个不大的圓在作匀速运動，他把这个不大的圓叫做"**本**輪"。本輪的圓心也繞着地球在作匀速运動。圖14画的就是托勒密的宇宙系。適当选擇本輪和大圓("**均輪**")的半徑，托勒密就能够很好的把他的理論和当时的观測协調起來。甚至於在一千五百年以後，說太陽位置在行星系的中心的哥白尼，也还沒有決心放棄匀速的轉動：他也認为行星是沿着本輪运動的，但是本輪的圓心却不是繞地球而是繞太陽运動的。直到布剌非常仔細的观测和計算以後，才指出匀速环状运動不合事实，因而引導刻卜勒去發現行星的变速橢圓形运動。

从托勒密的观點來說，行星的軌道究竟是怎样的呢？这

是一条和擺綫非常相近的曲綫．就擺綫來說，點沿圓周作勻速轉動，而圓心沿着直綫运動（讀者自己想一下，这時候得到的也就是圓沿直綫滾動時得到的擺綫）．托勒密說的，却是點沿着圓周运動，而圓心也沿着圓周运動．很明顯，这样得到的是一条性質跟擺綫非常接近的曲綫．这条曲綫叫做外**擺綫**（圖 15）．我們在後面还要談到它．

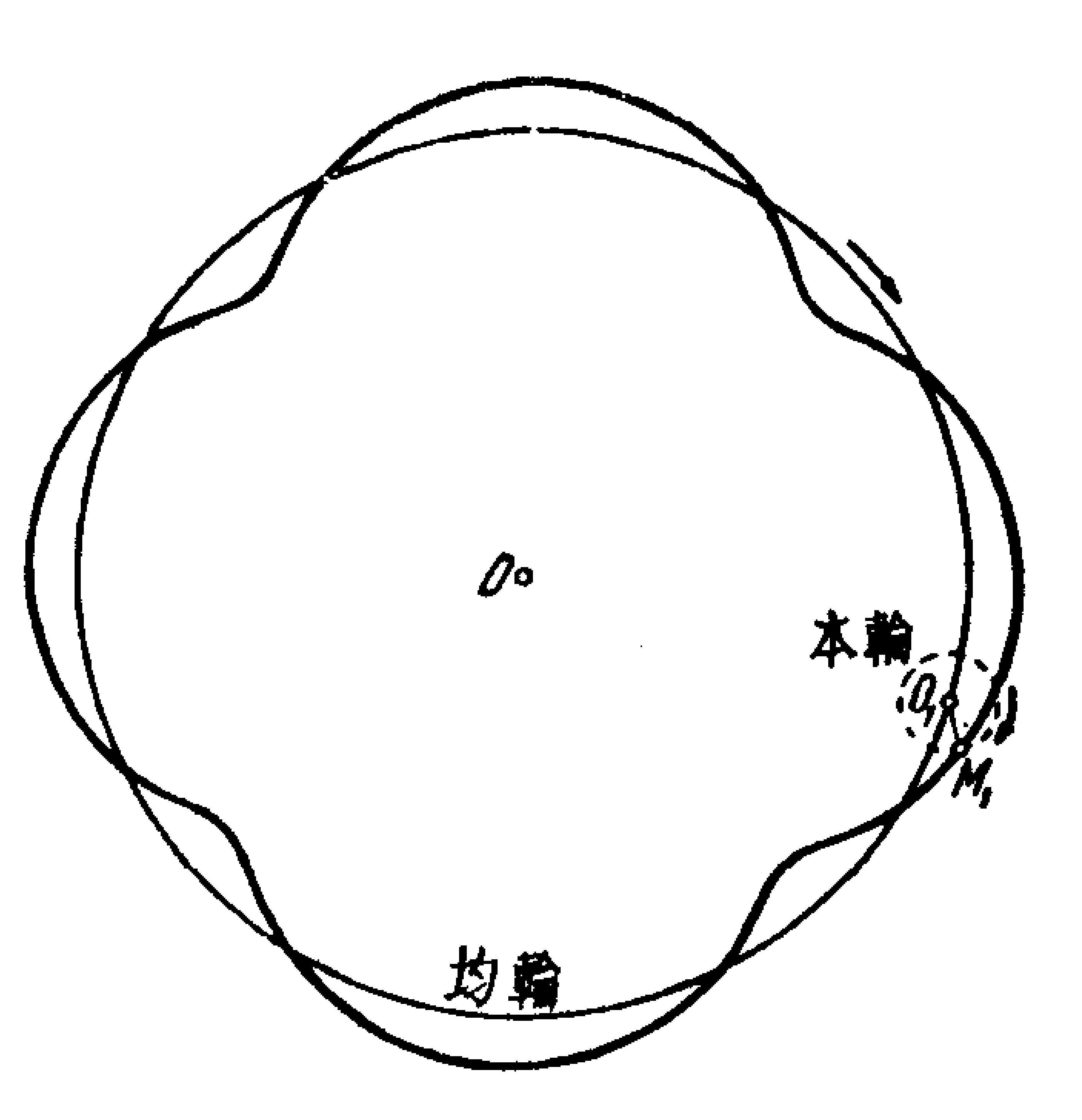


圖 15． 托勒密的外擺綫



第 二 章
擺綫的最重要性質

上來的第二道菜是擺綫形的餡餅……

斯尉夫特："格列佛遊記"

擺綫的切綫和法綫

圓的最自然的定义，大概是这样："固体質點繞着固定軸旋轉所經过的路徑叫圓." 这个定义是直观的，从它很容易導出圓的一切性質；而主要的是，它立刻就給我們描繪出一个作为連續曲綫的圓. 从圓的古典定义，"圓是平面上和一點等距离的點的軌跡"，就一點也看不出这个性質來.

为什麽在学校裏我們要把圓的定义說作點的軌跡呢？用运動（轉動）來說明圓的定义，坏处在什麽地方呢？我們來想一下这个問題.

在我們学習力学的時候，我們並不去証明幾何定理：我們認为这已經是知道了——我們只不过像引用已經知道的东西一样簡單地引用幾何学. 如果在証明幾何定理的時候，我們也把力学当作已經知道的东西一样加以引用，那就要犯一种

叫做“邏輯循环”的錯誤：就像在証明命題 A 時，我們引用了命題 B；而命題 B 本身却是用命題 A 來作根据的。說得簡單些，就是从甲推出乙，从乙又推出甲。在說明科学各个科目時，这种情况是不容許的。因此，在說明算術時，力求不要引用幾何；在說明幾何時，力求不要引用力学，其他的也一样。但是在說明幾何時，却可以大胆地利用算術，而且在說明力学的時候，也可大胆地利用算術和幾何：这是不会犯邏輯循环的錯誤的。

我們在前面学过的擺綫的定义，絲毫也不能叫幾何学家滿意：因为它是从力学的概念——速度，运動的合成等等——出發的。因此，幾何学家們竭力想給擺綫一个純粹的幾何定义。但是要想作出这样的定义，必須首先利用擺綫的力学定义去研究出它的基本性質。从这些性質裏选出最簡單、最具特徵的性質，可以用來作为幾何定义的基礎。

圖 16. 曲綫的切綫和法綫

我們先从擺綫的切綫和法綫的研究開始。曲綫的**切綫**是什麼，每个人都可以很清楚的想像得出來；高等數学裏也都有精確的切綫的定义，因此，我們在这裏就不再引它了。跟切綫在切點相交並垂直於切綫的直綫，叫做**法綫**。圖 16 上就画了曲綫 AB 在 M 點的切綫和法綫。

現在我們來研究擺綫（圖 17）。有一个小圓沿着直綫 AB 滚動。設小圓在開始一瞬間，垂直於 AB 的半徑經过擺綫最低

點轉了一个φ角，並到了位置 OM. 換句話說，我們假定綫段 M_0T 在綫段 M_0M_1 中所佔的一份，正好是φ角在 360°(圓周)中所佔的一份. 这時候點 M_0 到達了點 M. 點 M 也就是使我們感到兴趣的擺綫上的一點.

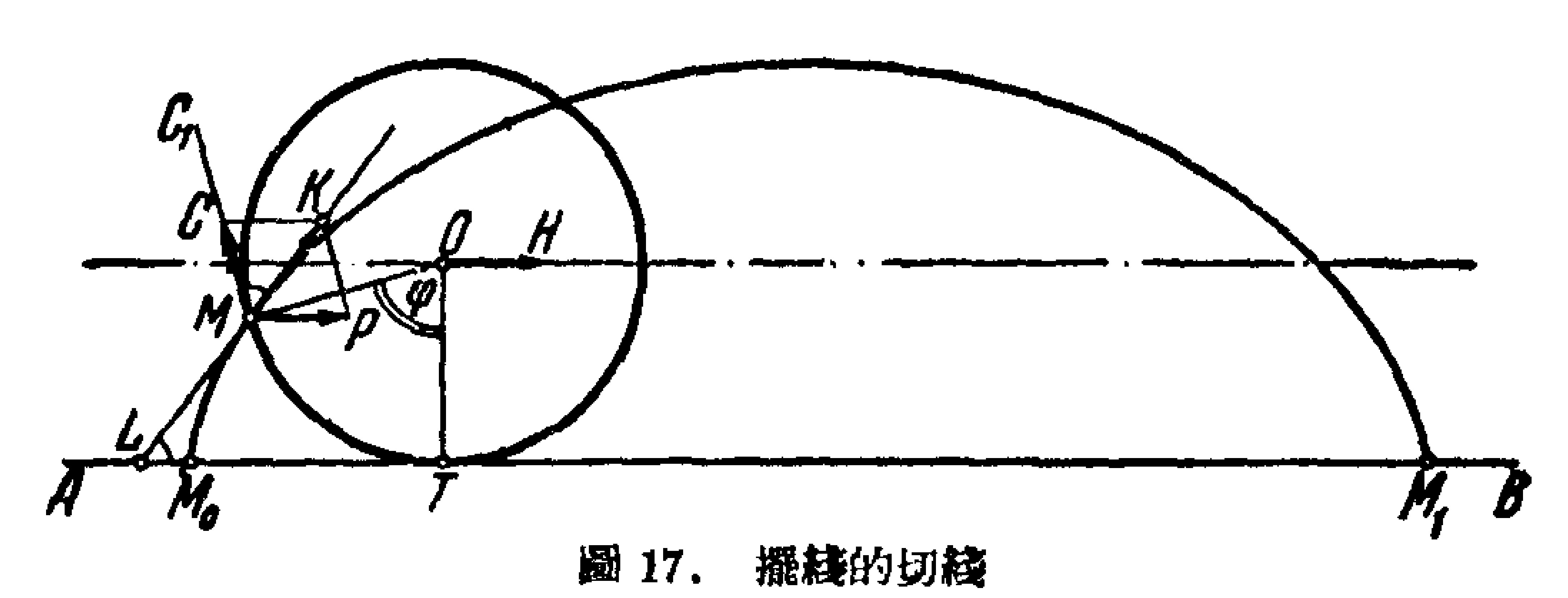


圖 17. 擺綫的切綫

箭头 OH 是表示滚動圓圓心运動的速度. 圓上所有的點，M 點也包括在內，都具有这样大的水平速度. 但是除此以外，點 M 还参加了圓的轉動. 在轉動時，點 M 在圓周上得到的速度 MC 是沿着圓周的切綫方向，也就是垂直於半徑 OM 的方向. 我們已經从"兩个騎自行車人的談話"一節裏知道，速度 MC 的大小等於速度 MP（也就是速度 OH）. 因此对於我們所說的运動，速度的平行四边形是一个菱形（圖 17 的菱形 $MCKP$）. 这个菱形的对角綫 MK 恰好是擺綫的切綫.

現在我們可以回答謝尔該和瓦夏談話末了提出的問題了. 从自行車車輪上甩出來的那个泥漿點，是沿着車輪上它离開的那一點的軌綫的切綫方向运動的. 但是軌綫不是圓，而是擺綫，因为車輪不單在轉動，而且还在滚動，也就是說，車輪作的是一个由前進运動和轉動所組成的运動.

上面所說的一切，使得我們可以解決下述"作圖問題"：設已知擺綫的準綫 AB，母圓的半徑 r 和擺綫上的點 M(圖17)，求作擺綫的切綫 MK。

有了點 M，我們就不难作出通过 M 點的母圓．为此，我們先用半徑 $OM=r$ 來求出圓心 O (O 點是在平行於直綫 AB 並跟它相距 r 的直綫上)．然後作任意長綫段 MP 平行於準綫．再作直綫 MC_1 垂直於 OM．在直綫 MC_1 上从 M 點引等於 MP 的綫段 MC．以 MC 和 MP 作边做一菱形．这菱形的对角綫也就在 M 點和擺綫相切．

这一作圖是純粹的幾何作圖，虽然我們曾經利用力学上的概念來得到它．現在我們可以放棄力学，不用它帮助來得出一些更進一步的推論了．

〔定理 1〕 擺綫(在任意一點)的切綫和準綫之間的交角，等於 90° 減去母圓半徑旋轉的角度的一半．

換句話說，在我們的圖 17 上，$\angle KLT=90°-\frac{1}{2}\angle MOT$ 或 $\angle KMP=90°-\frac{\varphi}{2}$．我們現在來証明这个等式．为了敍述簡便起見，我們把母圓半徑旋轉的角度 φ 叫做"基本角"．这就是說，圖 17 的 $\angle MOT$ 是基本角．我們假定基本角是銳角．对於鈍角的情形，就是說，对於滚動圓滚过了四分之一周時的情形，請讀者自己修改我們的論証．

我們來討論角 CMP．CM 边垂直於 OM(圓周的切綫垂直於半徑)．MP 边(水平綫)垂直於 OT(豎直綫)．但由条件，角 MOT 是銳角(我們規定只討論全周的第一个四分之一)，而角 CMP 是鈍角(为什麼?)．这就是說，角 MOT 和

角CMP合起來是$180°$(兩个具有互相垂直的边的角，其中一个是鋭角，而另一个是鈍角)。

由是，角CMP等於$180°-\varphi$。但是大家知道，菱形的对角綫平分頂角。因此，$\angle KMP=90°-\frac{\varphi}{2}$，这也就是要証明的。

我們現在來看擺綫的法綫。我們已經說过，曲綫的法綫是过切點和切綫垂直的直綫（圖16）。把圖17的左边画大一點，並引法綫ME($ME\perp MK$；参看圖18)。

由圖18知道角EMP等於角KME減去角KMP，也就是等於$90°-\angle KMP$。但是我們剛才已經証明，角KMP本身等於$90°-\frac{\varphi}{2}$。於是得：

$$\angle PME=90°-\angle KMP=90°-(90°-\frac{\varphi}{2})=\frac{\varphi}{2}.$$

我們已經証明了一个又簡單又有用的定理。我們把它表示成：

〔定理2〕 擺綫的法綫（任意一點的）和準綫之間的交角，等於"基本角"的一半。

(我們要記住，所謂"基本角"就是滾動圓的半徑旋轉的角度.)

現在我們把M點(擺綫的"動"點)和母圓的"底"點T(母圓和準綫的切點——参看圖

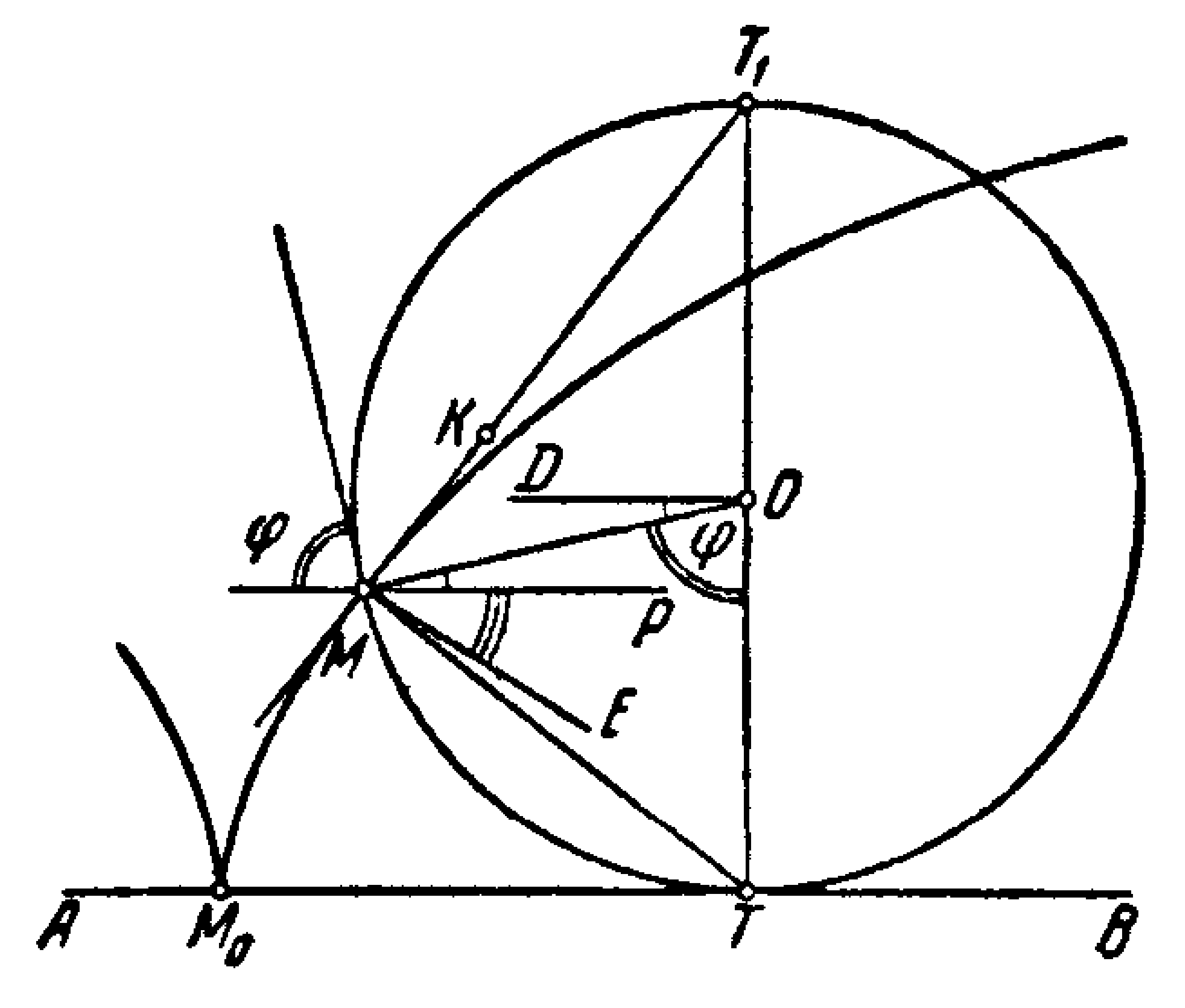


圖18. 補充說明定理2

18.）連結起來．三角形 MOT 顯然是一个等腰三角形（OM 和 OT 都是母圓的半徑）．这个三角形的兩底角的和等於 $180°-\varphi$，而每一个底角等於这和數的一半．於是，$\angle OMT=90°-\frac{\varphi}{2}$．

我們來看一下角 PMT．它等於角 OMT 減去角 OMP．我們立刻看出，$\angle OMT=90°-\frac{\varphi}{2}$；至於角 OMP，那就不难知道它等於什麼了．本來角 OMP 等於角 DOM（平行綫的內錯角）．立刻可以看出，$\angle DOM=90°-\varphi$．这就是說，$\angle OMP=90°-\varphi$．

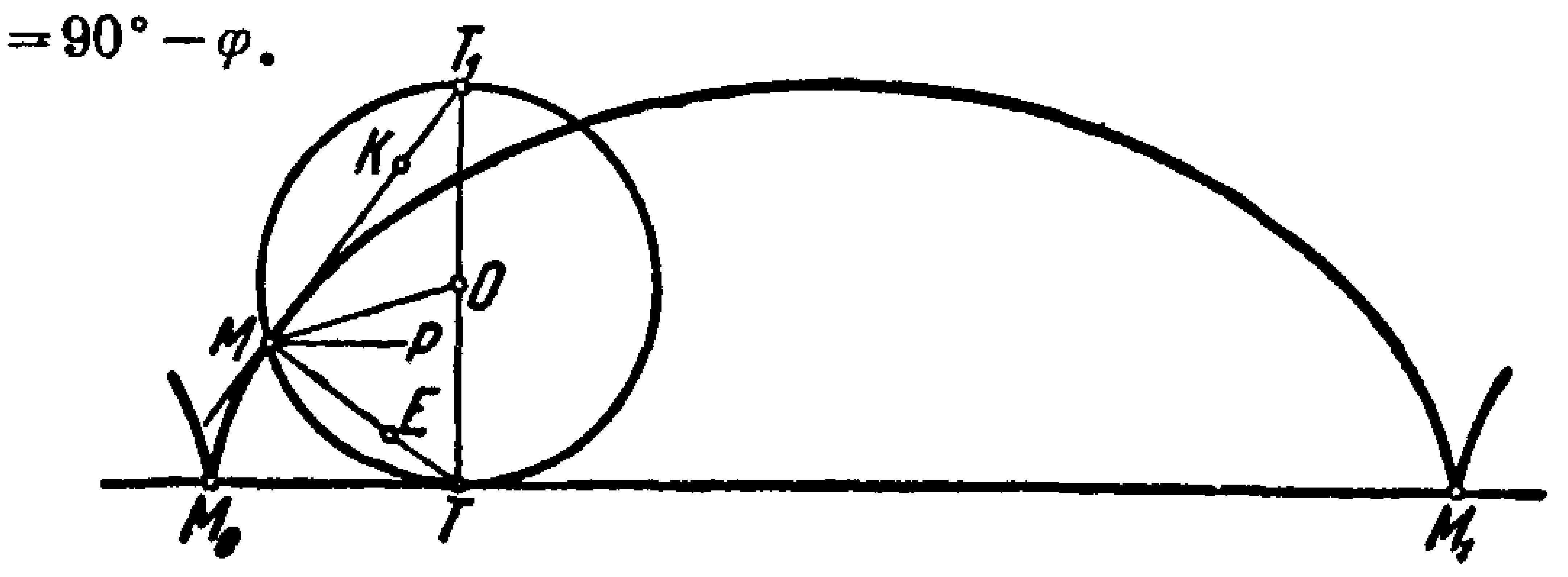


圖 19． 擺綫的切綫和法綫的基本性質

从这裏，得：

$$\angle PMT=\angle OMT-\angle OMP=90°-\frac{\varphi}{2}-(90°-\varphi)=\frac{\varphi}{2}.$$

我們就得到了一个重要的結果：角 PMT 和角 PME 相等（参看定理 2）．因此，直綫 ME 和 MT 重合！我們的圖 18 做得完全不对！圖 19 上画的才是直綫的正確位置．

怎样來敍述得到的結果呢？我們把它敍述成定理 3 的形式．

〔定理 3（擺綫的第一基本性質）〕 擺綫的法綫过母圓的“底”點．

从这条定理可以得出一条简單的推論．由定义，切綫和法綫之間的角度是直角．这是一个內接於母圓的角．因此它必須对着圓的直徑．因此 TT_1 是直徑，T_1 是母圓的"頂"點．我們把得到的結果敍述成：

〔推論(擺綫的第二基本性質)〕 擺綫的切綫过母圓的"頂"點．

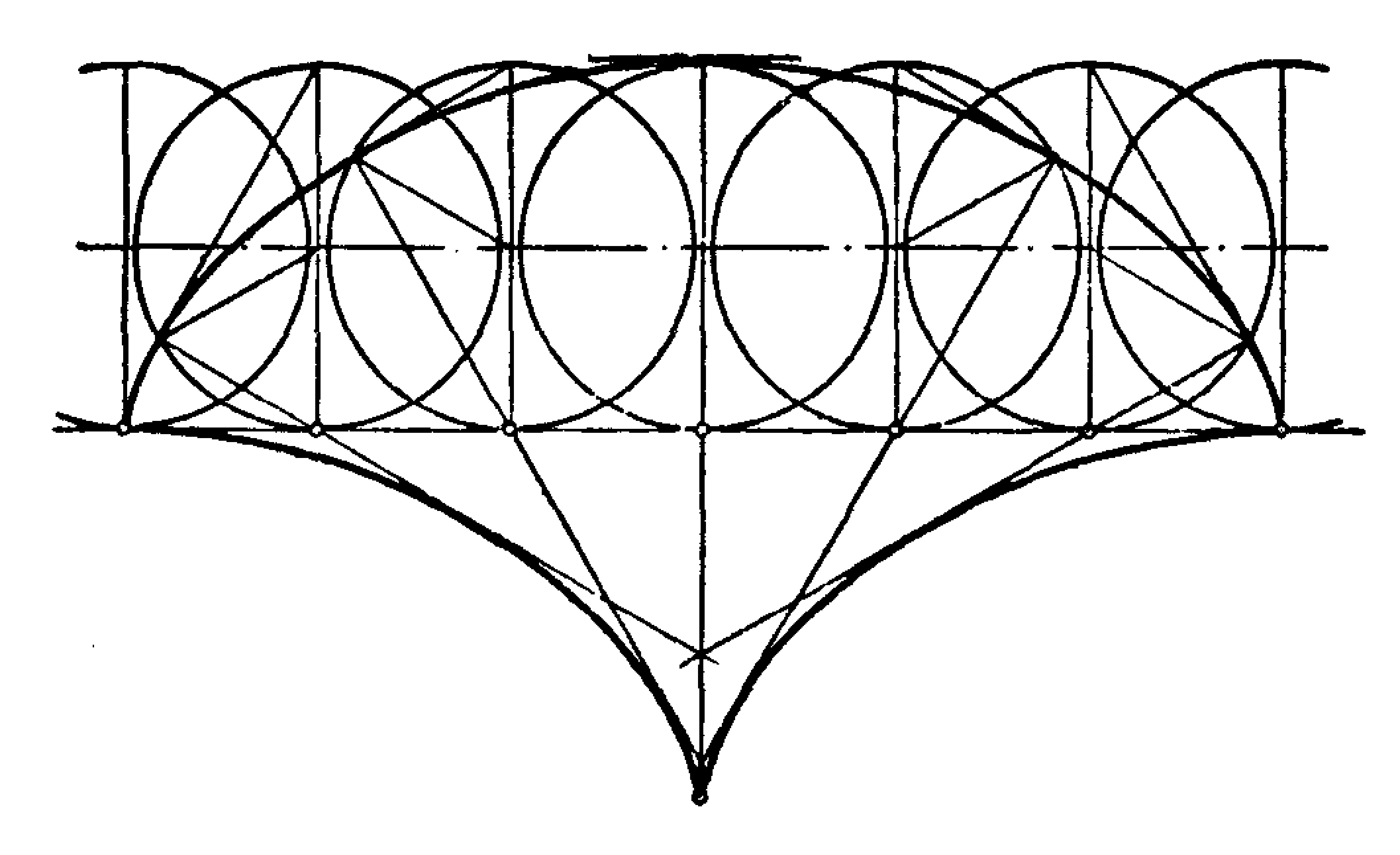


圖 20．擺綫是它自己的切綫的包絡

我們現在來回憶一下逐點作出擺綫的方法，像我們在圖 6 上所做的那样．

在圖 20 上，我們把擺綫的底分成 6 等分；恰如我們所知，分的份數越多，得到的圖就越精確．在我們作出的擺綫上的各點引切綫，这些切綫都能够把曲綫上的點和母圓的"頂"點連接起來．在我們的圖上有七条切綫(其中有兩条是豎直的)．要是随手來画出擺綫，我們就要注意是不是所有这些切綫都眞正相切：因为这可以大大的提高圖形的精確度．同時，

擺綫自身將緊包着所有这些切綫⊖.

同是在圖 20 上,我們在已經画出的擺綫的所有點上引法綫. 準綫不算在內,總共是五条法綫. 可以用手來作出这些法綫的包絡. 要是我們不取六个、而取 12 个或 16 个分點,那末圖上的法綫就增多起來,而包絡的輪廓就更顯著了. 全部法綫的这种包絡,在研究任何曲綫的性質時都非常重要. 对擺綫來說,就顯出了一种異乎尋常的事实:擺綫的全部法綫的包絡恰好也是擺綫,只是向下移動 $2a$ 个單位並向右移動 πa 个單位罢了. 对於这种有趣的擺綫特有的結果,我們还应該加以研究.

擺綫的切綫和法綫的性質,首先是托里拆利(1608–1647)在他的"幾何論文集"(1644年)一書裏加以說明的. 那時候,托里拆利曾利用關於运動合成的概念. 稍晚一些,但是比較完善一些,罗别尔瓦里(法國數学家皮尔遜的筆名;1602–1672). 曾經研究过这些問題. 笛卡兒也曾研究过擺綫的切綫的性質;他曾經不求力学帮忙而說明了他的結果.

擺綫的幾何定义

我們現在不利用力学,而用點的軌跡來給擺綫下一个定义. 最簡單的做法是这样. 我們來看一条任意的直綫 AB(假定它的方向是水平的)及 AB 上的一點 M_0. 我們再來看所有一切跟这条直綫相切並在它的同一边而半徑一定的圓. 在每

⊖ 这种曲綫也叫做"包絡". 一切曲綫都是它自己的全部切綫的包絡.

一个圓上，从它跟直綫 AB 的切點 T（对着 M_0 點的方向）引弧段 TM，長度等於綫段 M_0T。M 點的軌跡（就一切所說的圓取出的點）也就是擺綫。

这样艰澀的定义是不是靠得住呢？利用运動來作的定义要明顯得多！而且实質上是什麼也沒有改变。只不过用幾何的語言替代了力学的語言罢了。但这時候我們已經佔了很多便宜：我們已經說过，幾何的事实不要依靠力学來解釋，好避免"邏輯循环"。然而我們也受到了不少損失。如果我們希望單單利用这一定义來引出擺綫的切綫和法綫的性質，就会碰到巨大的困难。难怪托里拆利和罗別尔瓦里不能克服而要求力学來帮忙了。笛卡兒在他对擺綫的純幾何研究中，使他終於發現了異常有力的幾何学研究方法——所謂解析幾何学。

我們來証明擺綫的一个重要性質，並且打算用它來作为研究擺綫的基礎。

我們現在來看三角形 MTT_1（圖 21），它是由母圓的垂直直徑、擺綫的切綫和法綫做成的。MT_1T 角內接於圓，因此等於截取同一弧的圓心角的一半，也就是等於 $\frac{\varphi}{2}$。引 $MK \parallel AB$，$ME \perp AB$。綫段 ME 以後会起重大作用，因此我們就給它一个名字，把它叫做擺綫 M 點的"高"，並用字母 h 來表示。於是，擺綫 M 點的高就是 M 點跟準綫的距离。

現在我們來看角 KMT。它等於角 MT_1T（为什麼？）。由三角形 TMT_1，我們得：

$$MT = 2a\sin\frac{\varphi}{2},$$

又从三角形 TKM：

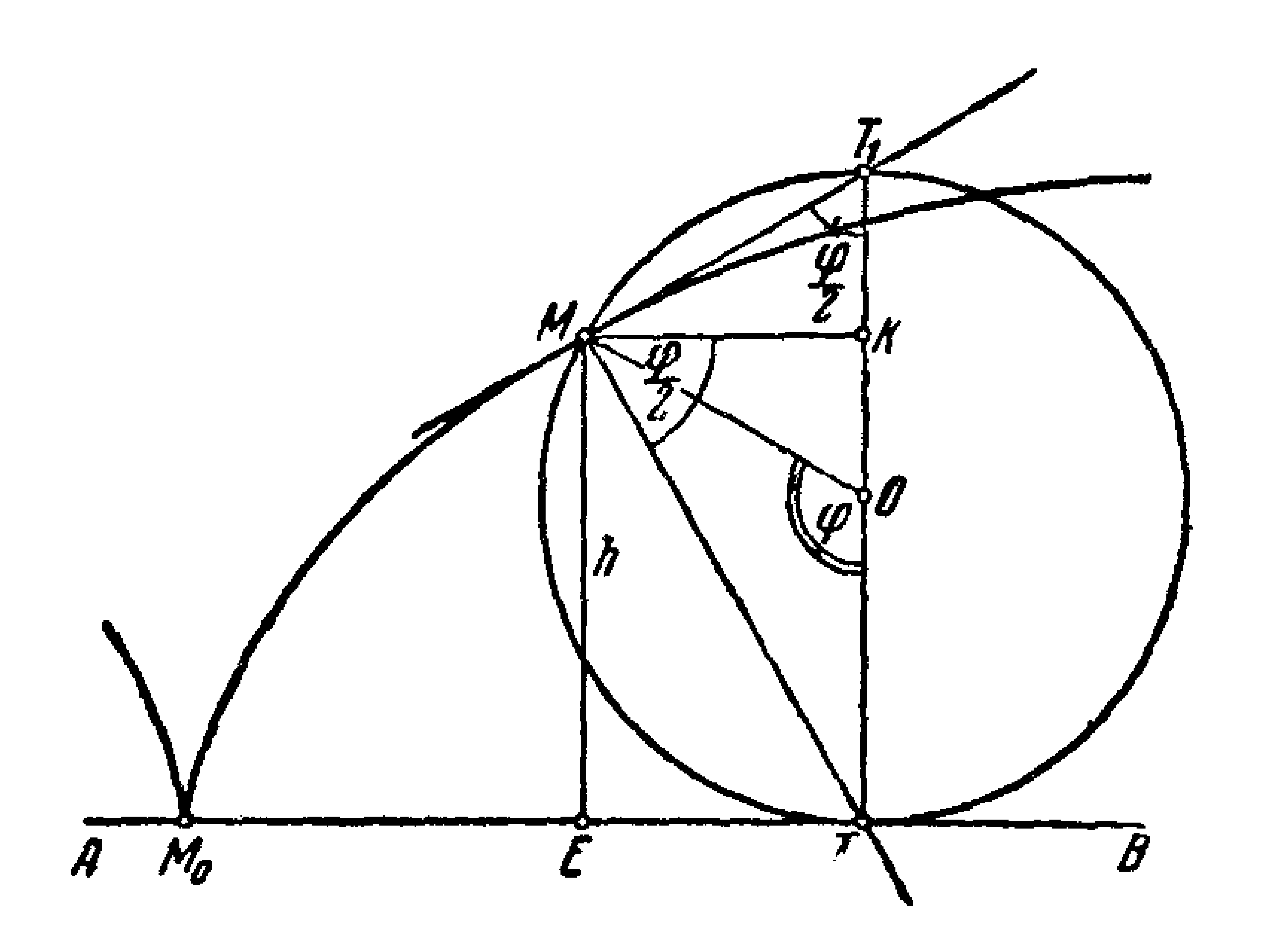


圖 21. "高"与切綫斜度間的關係

$$KT = MT\sin\frac{\varphi}{2},$$

把这兩个結果加以比較，並注意 $KT = h$，我們最後就得到：

$$h = 2\,a\,\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

我們已經用 M 點的切綫和豎直綫（我們仍舊把直綫 AB 看作水平方向）之間的交角來表示 M 點的高了。現在我們用"高"來表示这个角的正弦。顯然可得：

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{h}{2a}} = k\sqrt{h},$$

在这裏，我們用 k 來表示已知擺綫的常數 $\sqrt{\frac{1}{2a}}$. 現在用語言來敍述出所得的結果：

〔定理 4〕 擺綫在 M 點的切綫跟豎直綫間交角的正弦，和 M 點高的平方根成一定比例。

顯而易見，任何擺綫都具有这种性質。於是發生了这样

一个問題：这种性質能表示擺綫的特性到什麽程度，是不是凡是具有这种性質的曲綫一定都是擺綫？

可以証明事情正是这样，——下面的（逆）定理也是正確的：

〔定理 5〕 如果已知直綫 AB 和點 M，那末唯一的滿足定理 4 条件並过 M 的曲綫是擺綫。

这時候这擺綫的母圓的半徑是和係數 k 有關的，在定理 4 裏已經說到过，它滿足下面的關係：

$$k=\sqrt{\frac{1}{2a}}$$

（不言而喻，从點 M 到 AB 的距離必然小於 $2a$。）

用初等數学方法作出的这条定理的嚴格証明是非常麻煩的，因此我們也就不在这裏引述了。

定理 5 非常重要。在物理学上和技術上，常常需要求出滿足某种已知条件的曲綫。我們在本書末尾將介紹一个問題，在这个問題裏，就需要求出滿足定理 5 条件的曲綫。在这种情形和所有其他類似的情形，我們都可以証实所求的曲綫就是擺綫。

要是定理 5 的条件裏沒有提到所求的曲綫必須通过預先指定的點 M，那末得到的就不是一条⊖而是無限多条擺綫，它們裏面的任一条都可以由另一条沿着直綫 AB 方向平行移動而得到（它們裏面一定有一条經过點 M，有一条經过點 M_1，

⊖ 嚴格說來，在恰好滿足定理 5 的条件下，得到的不是一条而是兩条擺綫。讀者自己想想，为什麽会这样，第二条擺綫應該在什麽地方。

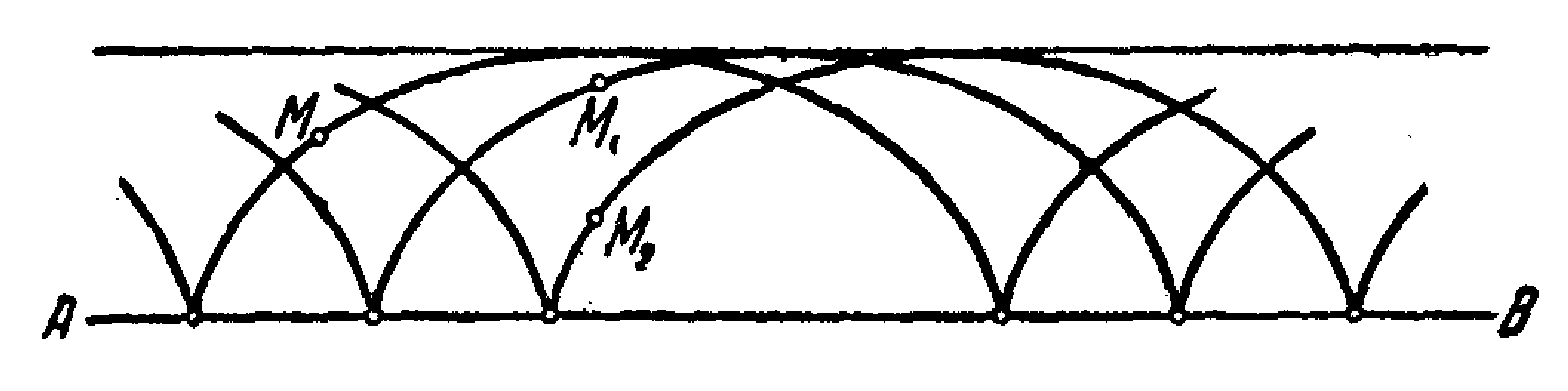


圖 22. 擺綫族

有一条經过點 M_2,等等)。 圖 22 就画了这样一組擺綫,或者所謂**一族擺綫**。

我們还要提出擺綫的一个十分明顯的性質:它的拱弧,对於过拱弧底边中點的垂綫,是对称的。然後我們暫時轉到另外一条罗别尔瓦里曾經研究过的著名曲綫,他把这条曲綫叫做**擺綫的伴隨曲綫**。

擺綫的伴隨曲綫和它的發現

我們現在來看擺綫(圖 23)。从它上面的點 M 引一条和母圓的豎直直徑相垂直的直綫。我們就得到一點 P。对於擺綫上所有的點毫無例外地都進行这样的作圖(例如點 M_2 对应於點 P_2,擺綫的頂點就对应於頂點 P_1 自己、歧點对应於歧點等等,所有这些在圖 23 中都很清楚)。当點 M 画出整个擺綫的拱弧時,點 P 也画出了某一条曲綫。这条曲綫就叫做擺綫的伴隨曲綫。"伴隨曲綫"的性質是罗别尔瓦里研究过的。他曾經利用它來計算擺綫的拱弧和它的底所圍的面積。但是我們不再系統地研究伴隨曲綫。我們做得比較簡單,只要設法認出它正是我們的一位老朋友就行了。

我們來观察擺綫、它上面的點 M 和伴隨曲綫上相应的點

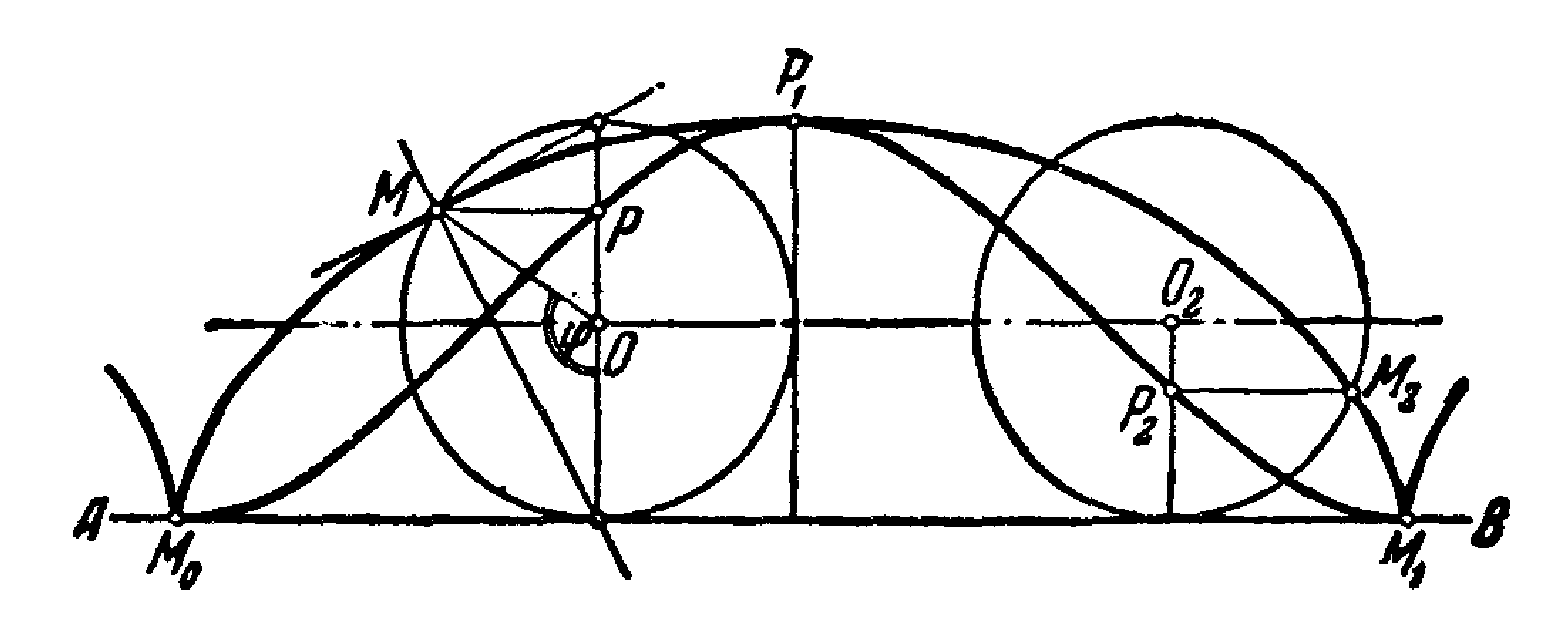


圖 23. 擺線的伴隨曲線

P (圖 24).我們用字母 Q 來記母圓的圓心. 在这裏,我們有:

$$QP = QM\cos\angle MQP = a\cos(180° - \varphi)$$

$$= -a\cos\varphi = -a\sin(90° - \varphi) = a\sin(\varphi - 90°).$$

我們來画出母圓圓心的軌跡(圖 24 上的直綫 X_1X). 从 M_0 點沿 AB 截取綫段 M_0K, 長度等於 $\frac{\pi a}{2}$. 引 $KY \perp X_1X$. 用字母 O 來标出 X_1X 和 KY 的交點. 現在,所有的輔助作圖都已經完成了,因而我們不難"説明这条神秘的伴隨曲綫的个性",像普通在驚險小説裏描寫的那样.

从準綫上擺綫的歧點(M_0)到母圓和準綫的切點(R)等於

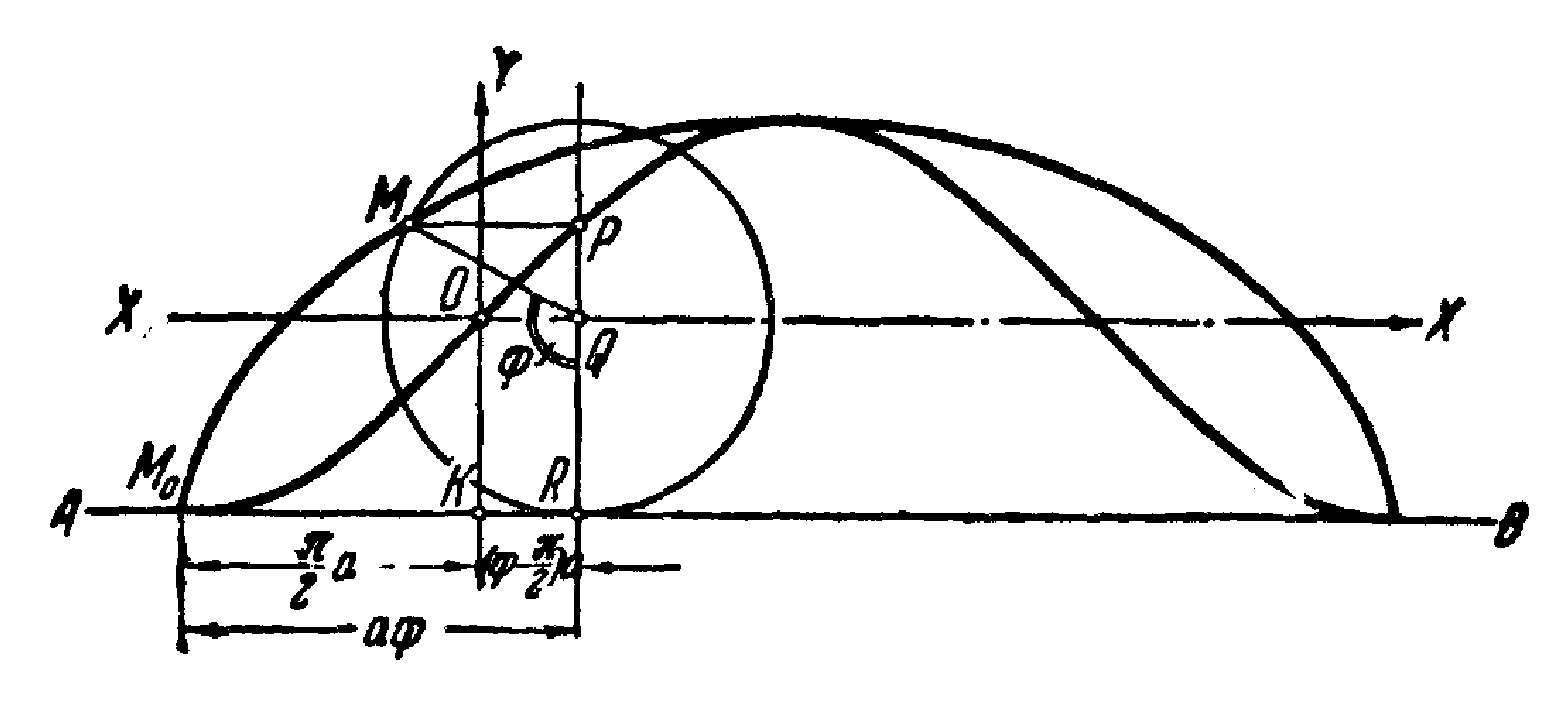


圖 24. 擺綫的伴隨曲綫是正弦曲綫

$a\varphi$，此处 φ 是用弧度表示的基本角 MQR⊖. 在横軸 X_1X（讀者知道直綫 OX 和 OY 就是座标軸，在繪圖時常常要用到）上的綫段 OQ 等於 $M_0R-M_0K=a(\varphi-\frac{\pi}{2})$，而綫段 QP 等於 $a\sin\angle PMQ$，也就是等於角 $(\varphi-\frac{\pi}{2})$ 的正弦乘半徑 a.

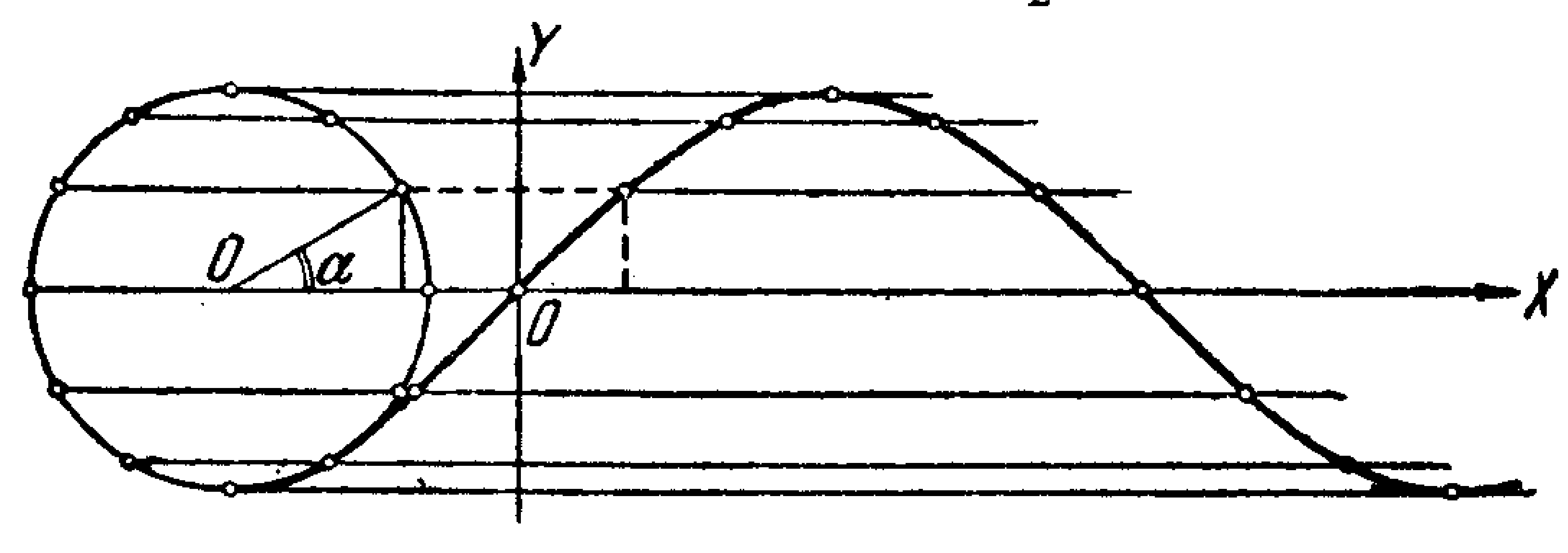


圖 25. 正弦曲綫的作圖

於是，从 O 點沿水平方向取綫段，長度等於圓弧；又沿豎直方向作与此弧相应的角的正弦. 我們現在曉得这是三角学上熟悉的普通正弦曲綫的作圖方法（圖 25）.

这样一來，这个陌生人就被揭穿了！它就是普通的正弦曲綫. 但是这正弦曲綫的"始點"（O）並不跟擺綫的歧點一致：它向右边移動了 $\frac{\pi}{2}a$，並向上移動了 a.

我們來仔細察看一下圖 24，立刻就看出，擺綫和它的伴随曲綫相互对应的點 M 和 P 之間的微妙關係：擺綫和它的伴随曲綫的相互对应點之間的綫段 MP 等於母圓的弦的一半（这条弦是平行於 AB 的，它和 AB 的距离等於从 AB 到 M 點的距离）.

我們現在來看一下圖 26. 这圖上画了幾个由擺綫的拱弧

⊖ 因 M_1R = MR的長，而圓弧長等於 $a\varphi$，φ是用弧度表示的圓心角.

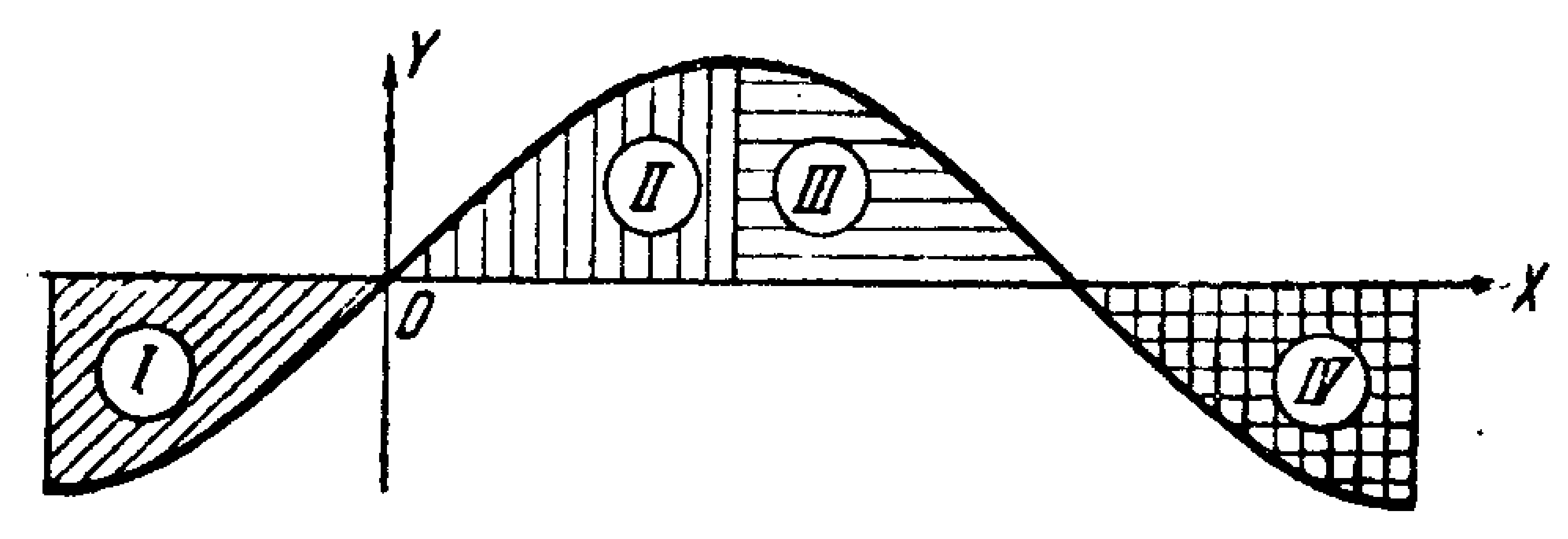


圖 26. 正弦曲綫的性質

和直綫（水平的跟豎直的）圍成的圖形．由於对称的緣故，我們可以看出區域 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ（用不同的綫条画出）是相等的．於是，在圖形所在的平面上繞 O 點旋轉 180°，就可以使區域 Ⅱ 和 Ⅰ 重合；照 Ⅱ 和 Ⅲ 中間的豎直綫对摺，可以使 Ⅱ 和 Ⅲ 及 Ⅳ 和 Ⅰ 重合．完全一样，从圖 27 可以看到，正弦曲綫把矩形 $ABCE$ 分成兩个同样大小的部分．实際上，

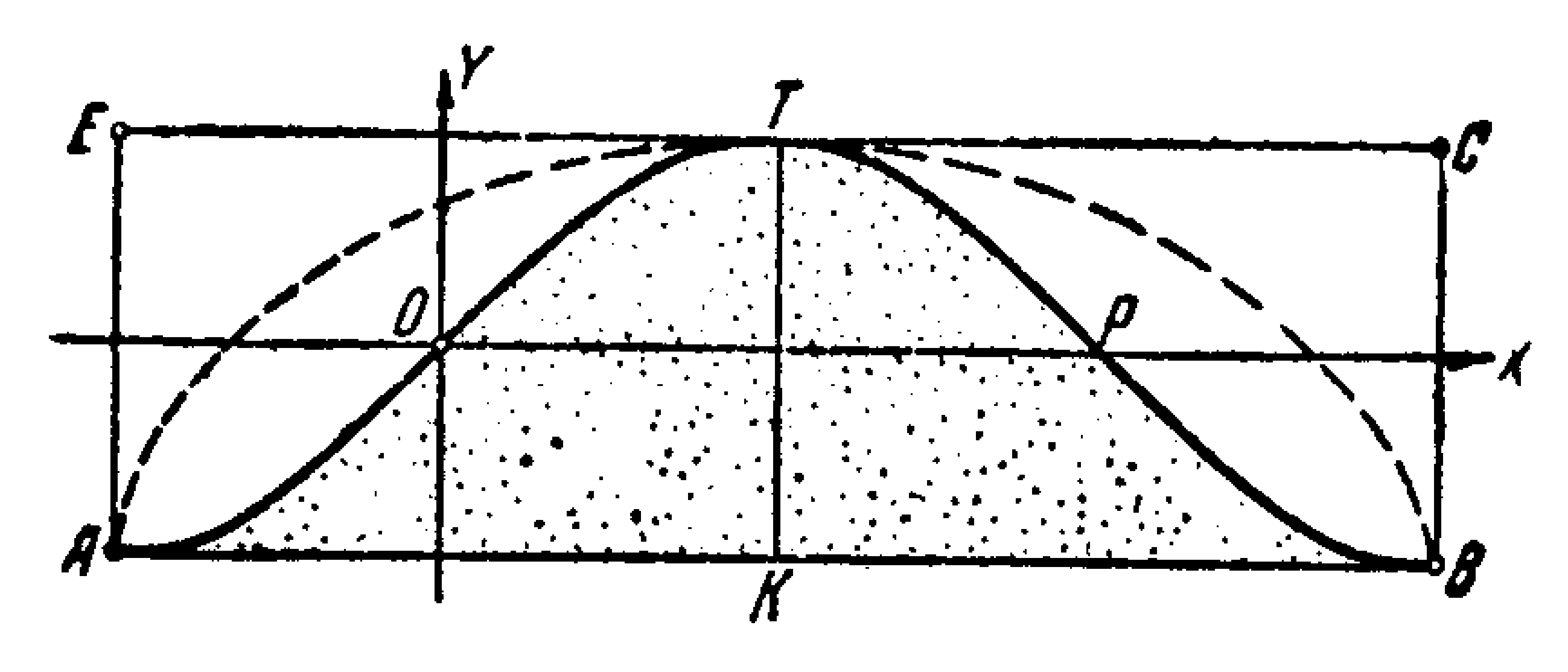


圖 27. 正弦曲綫和准綫間的面積

要是把圖形 $AOTE$ 繞 O 點旋轉 180°，我們就可以使它和圖形 $AOTK$ 重合；把圖形 $KBPT$ 繞 P 點旋轉 180°，我們就可以使它和圖形 $CTPB$ 重合．因此，擺綫的一个拱弧的伴隨曲綫和这拱弧的底所圍的面積等於矩形 $AECB$ 的面積的一半，矩形 $AECB$ 的底 AB 等於母圓的周長，也就是 $2\pi a$，而高 KT 就是母圓的直徑 $(2a)$．於是，圖形 $AOTPBK$ 的面積（圖

27)等於 $2\pi a\cdot 2a\div 2$。如果用字母 S 來表示这个圖形的面積，我們就得到公式：

$$S=2\pi a^2.$$

用語言來敍述，就是：擺綫的一个拱弧的伴随曲綫和这拱弧的底所圍的面積，等於母圓面積的兩倍。

擺綫的面積．伽利略定理

現在我們已經有足够的準备來計算擺綫的拱弧和底所圍的面積了．这种面積計算的最初記載，是在維維安和托里拆利的著作裏．他們把这項計算和他們的老師伽利略的名字联在一起；因此，關於擺綫面積的定理常常叫它做伽利略定理．

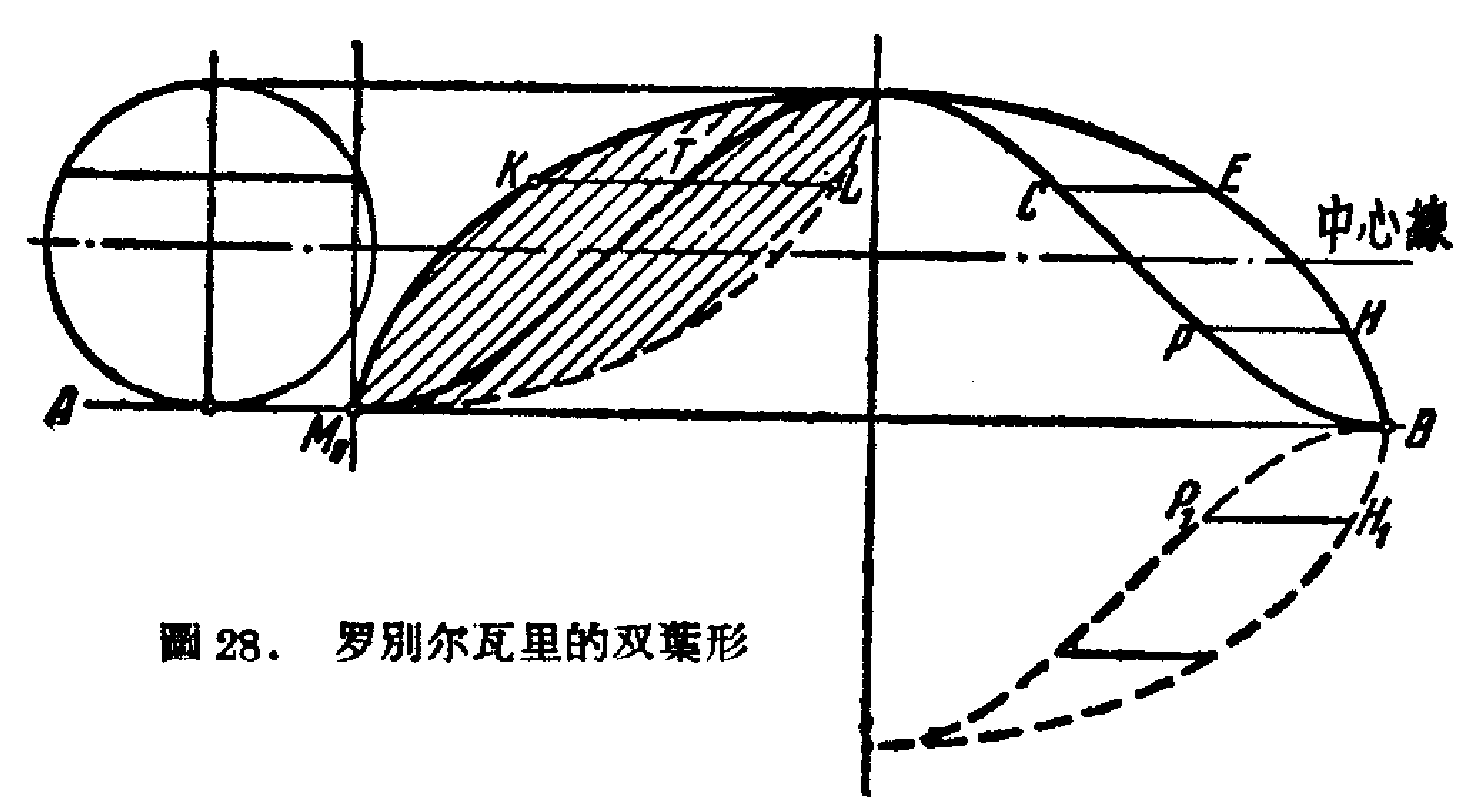


圖 28． 罗別尔瓦里的双葉形

在計算曲綫所圍的面積時，托里拆利和維維安都利用了一种叫做“不尽分割法”的特殊方法．这种方法是这样：把曲綫形分成無限小的狹条（“不可分元”），使它的面積相当容易算出，然後再把它們加起來．这种方法經过半世紀以後，促成了積分法的發現．我們現在不照托里拆利和維維安的道路

走，而來說明另外一种計算面積的方法——罗别尔瓦里法（把它稍微弄得精密一點）。

我們來看擺綫的拱弧和它的伴隨曲綫所圍的圖形。在圖28上，由兩个葉片構成的圖形是用粗綫包圍起來的。我們現在來計算它的面積。

首先，我們作出圖形右边一葉關於準綫 AB 的鏡像（在圖28上，这个像是用虛綫画出的）。然後我們把这虛綫搬到左上方，把它貼到左边一葉，使得那作为各葉葉边的正弦曲綫重合在一起。我們就得到一个凸形，它在圖28上是用陰影綫画出，並在圖29上單独画出。我們來確定这个圖形的一个非常重要的性質。

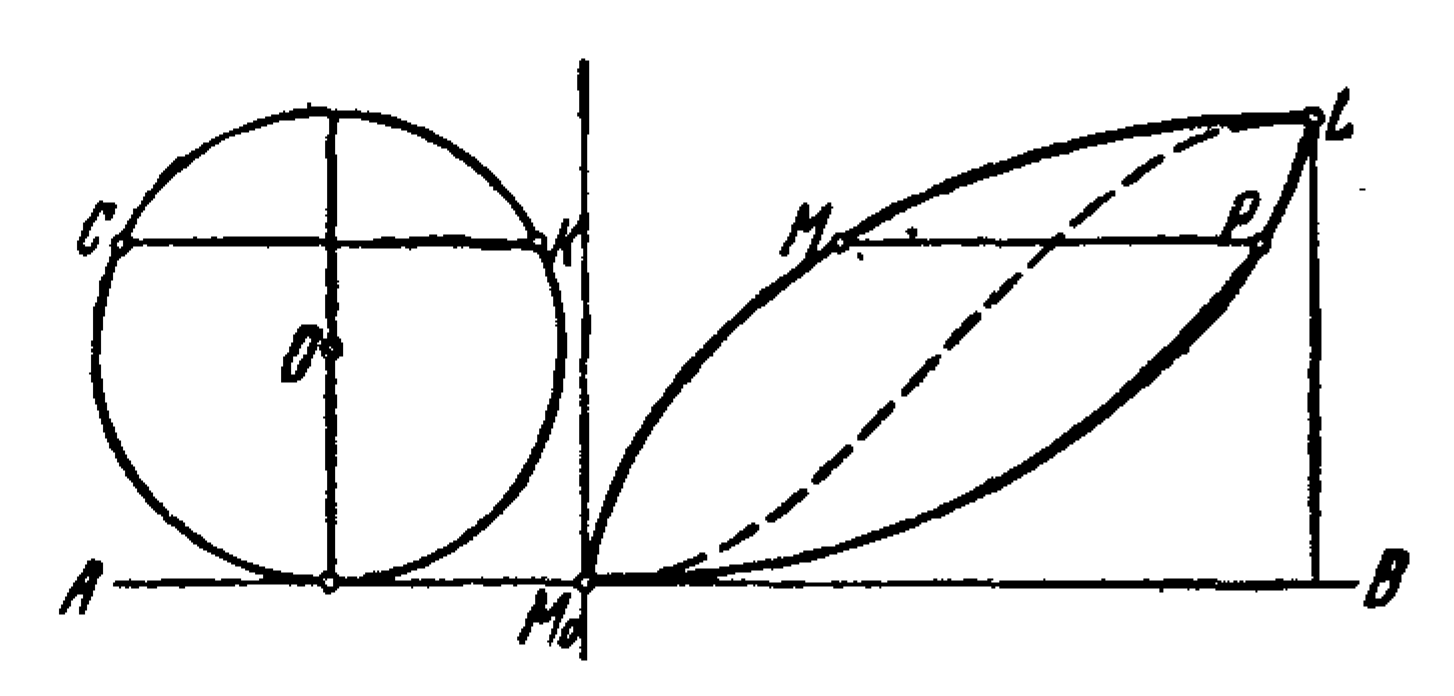


圖 29. 双葉形变成的圖形

1. 凸形 M_0PLM 和圖28上用粗綫画出的双葉形同样大。这可以从这个圖形就是由那兩葉"組成"看出來。

2. 凸形裏任一条横弦，都等於葉形中跟这横弦距 AB 等距离的弦的兩倍。实际上，右边一葉距中心綫等距的弦 CE 和 PH（圖28）是相等的，因为它們都等於母圓裏距圓心同距离的弦的一半（回想一下，擺綫和它的伴隨曲綫相互对应點之間的綫段等於母圓的弦的一半，参看第30頁）。这也就是說，$KT=CE=PH=P_1H_1=TL$。

这就推出一个重要的結果：凸形的弦 MP（圖29）等於距

準綫同一距离的母圓的弦 CK.

我們現在來討論罗别尔瓦里的凸形和跟直綫 AB、A_1B_1（圖 30）相切的圓. 我們引一系列平行於 AB 和 A_1B_1 的直綫，並且把它們跟圓周和凸形的边的交點依次用直綫段連起來，像圖上所表示的那样⊖. 用这种方法得到的內接多边形（像 $HLMNPQRSTK$ 和 $H_1L_1M_1N_1P_1Q_1R_1S_1T_1K_1$），我們把它們叫做"对应"多边形. 平行於 AB 的直綫把"对应"多边形分成一系列梯形（还有三角形）. 在圓內和罗别尔瓦里圖形中的"对应"梯形，比如 $NPRS$ 和 $N_1P_1R_1S_1$，面積是相等的，因为这兩个梯形的下底、上底（对应的弦）和高对应相等. 在圖 30 上，同大的"对应"梯形用同一种陰影綫画出.

我們現在把平行於 AB 的"間隔的"直綫無限增多，使任一对相隣直綫間的距离趨於 0. 於是，我們在圓內得到一系

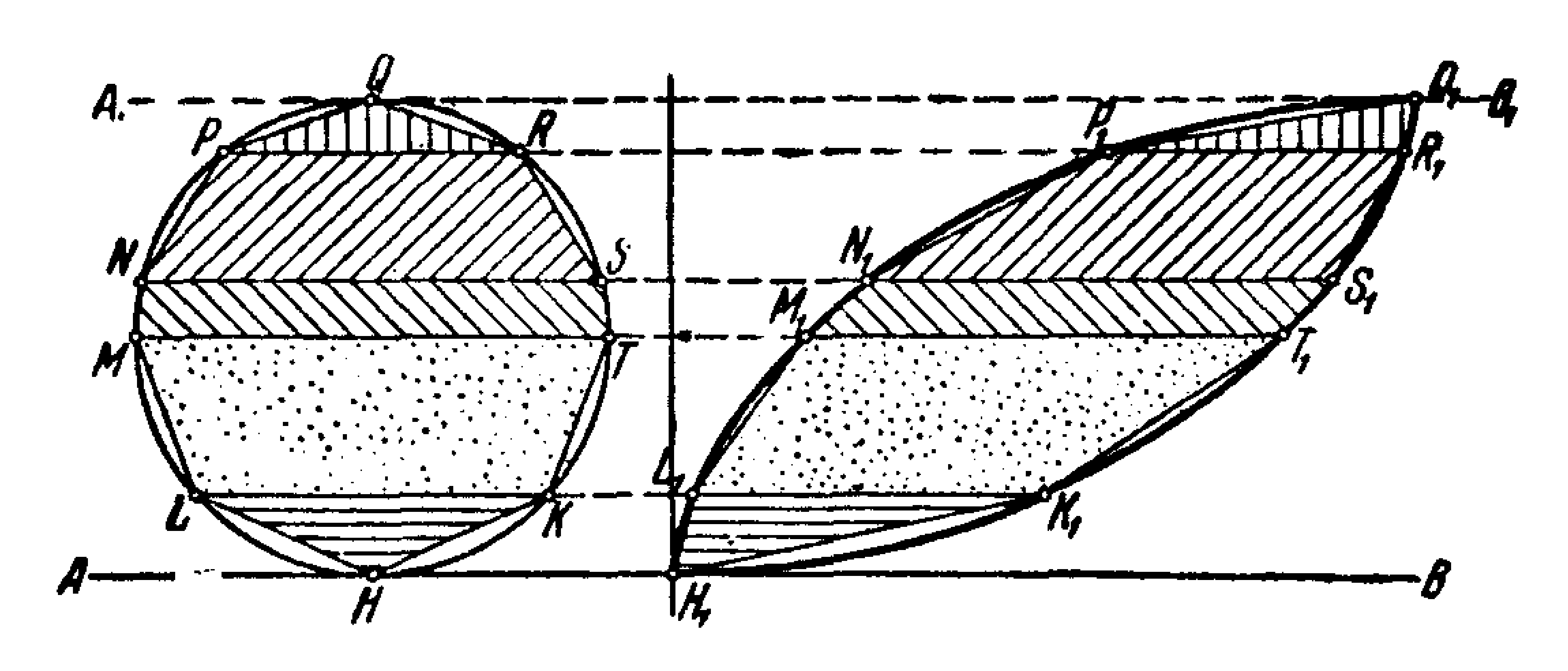


圖 30. 內接於圓和罗别尔瓦里凸形的多边形

⊖ 在这个圖上，也应当想像到圓的弦 MN 和 ST 以及罗别尔瓦里圖形的弦 M_1N_1 和 S_1T_1. 但是它們太小了，以致不能用肉眼把它們从相应的弧區别開來.

列多边形，它們的边的數目無限增多，而每边的長却趨於0．我們知道，这些多边形的面積 S_n 的極限是母圓的面積：

$$\lim S_n = \pi a^2.$$

內接於罗別尔瓦里凸形的多边形列，这時候又怎样呢？这一列內接多边形的面積 Σ_n，將趨於罗別尔瓦里圖形的面積 Σ．大家知道，如果兩个变量在一切变化下都保持着对应相等的值，並且有一个趨於一定的極限，那末，另一个也一定趨於同一極限．但是內接於罗別尔瓦里的多边形和內接於圓的"对应的"多边形同大．因此，我們就得出結論，內接於罗別尔瓦里的多边形面積的和的極限，等於內接於圓的"对应的"多边形面積的和的極限；而这也就是說，罗別尔瓦里凸形的面積等於母圓的面積：

$$\Sigma = \pi a^2.$$

从这裏我們得到了一条直接推理：双葉形（圖 28）的面積等於母圓的面積．

我們現在再來看一下圖 27．像我們已經看到的，圖形 $AOTPBKA$ 的面積等於母圓面積的兩倍（擺綫的一个拱弧的伴隨曲綫和这拱弧的底所圍的面積，参看第 32 頁）．双葉形的面積，我們剛才已經指出：它等於母圓的面積．因此，擺綫的一个拱弧和它的底所圍的面積等於母圓面積的叁倍．这个結果也就是著名的"伽利略定理"．

擺綫的進一步性質

說过面積之後，我們自然就会說到擺綫拱弧的長和由这

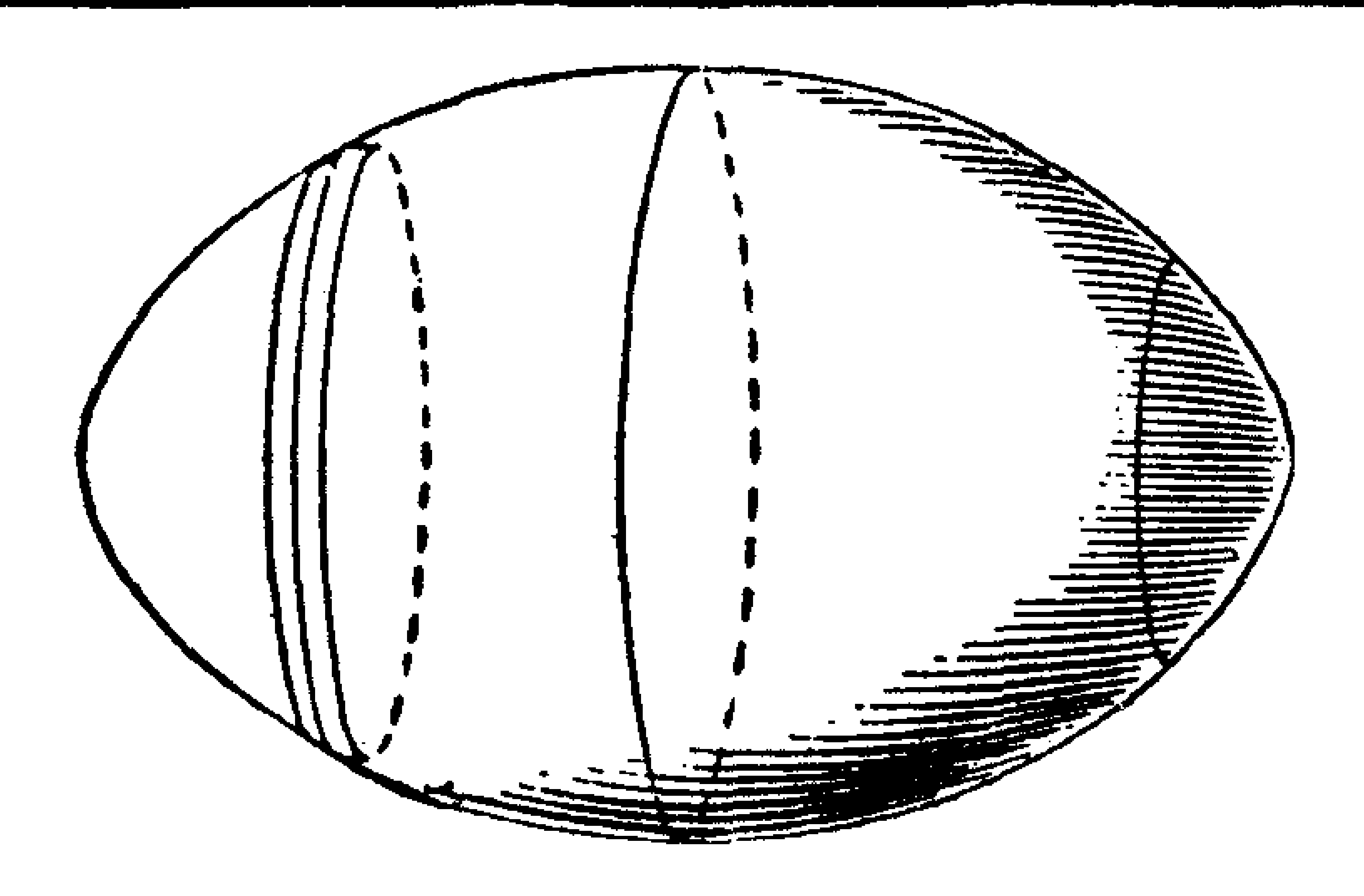


圖 31. 擺綫旋轉產生的卵形体

拱弧旋轉產生的体積．我們先來說这体積．

如果擺綫的拱弧繞着它自己的底旋轉，那末它就產生了一个曲面，这曲面包圍着一个卵形体，像圖31上画的．把它分成非常薄的層，在这些薄層中各內接一圓柱（像圖上画的那样），然後把它們的体積加起來．这样，罗别尔瓦里就得到了整个卵形体的体積．我們現在不再來重複他那又長又麻煩又不很嚴格的計算了．現代的高等數学，使我們不难求出这个体積．我現在來報導一个現成的結果：擺綫的拱弧繞着它的底旋轉產生的体積等於 $5\pi^2a^3$．这旋轉面的面積也已經算出來了：它等於 $\frac{64}{3}\pi a^2$，也就是說有母圓面積的 21 倍多點．

罗别尔瓦里还研究过別的由擺綫旋轉產生的曲面．他作出擺綫關於它的底的鏡像，以及由擺綫和它的鏡像做成的卵形曲綫，然後把它繞着 KT 軸旋轉（圖 32）．这時候，旋轉產生的曲面的面積等於 $32\pi^2a^2$，这曲面所圍的蘿蔔形体的体積等於 $12\pi^3a^3$．

在他後來不久，著名的物理学家巴斯噶定出了由擺綫的

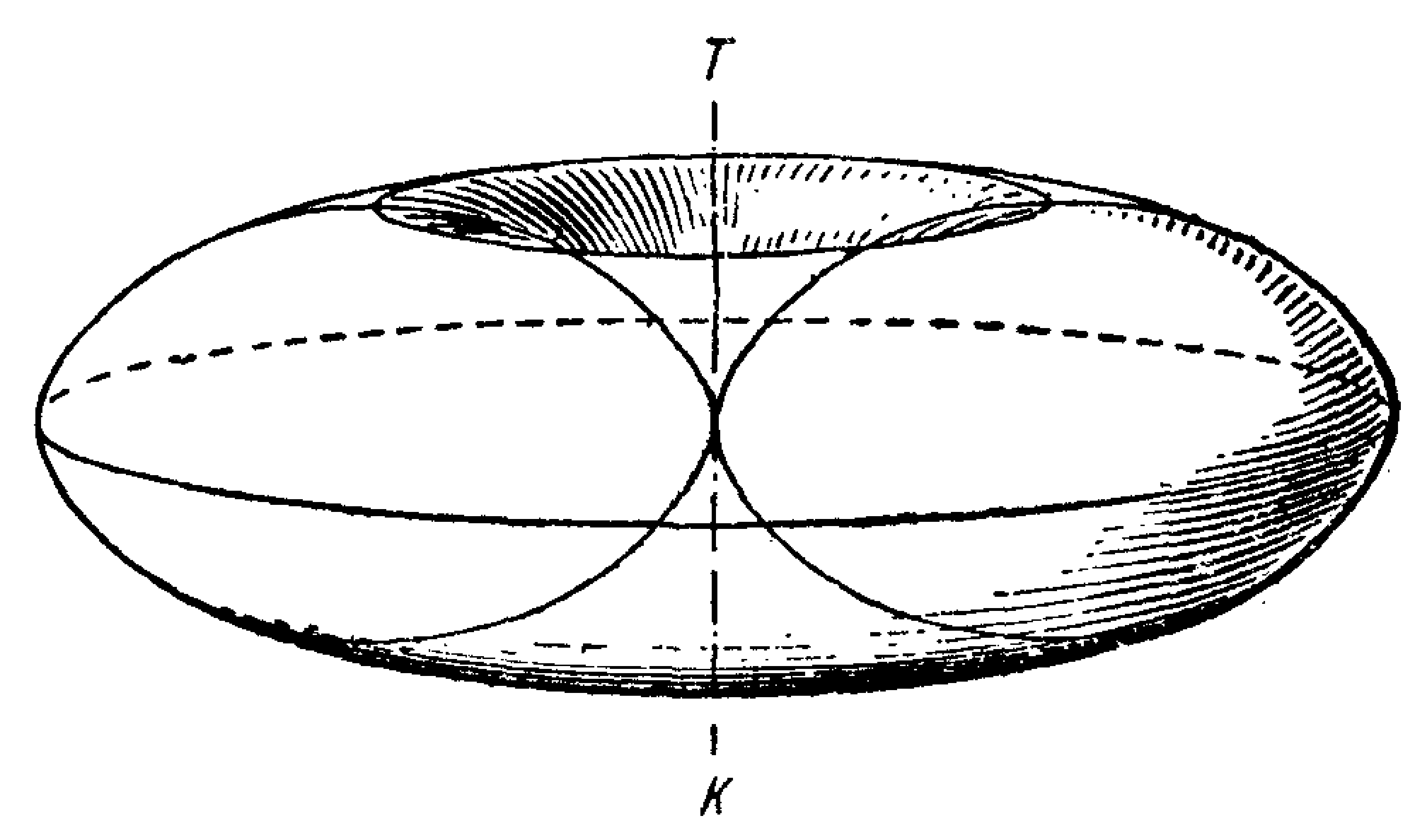


圖 32. 由擺綫所產生的蘿蔔形旋轉体

一部分繞着各种不同的軸旋轉形成的物体的体積和重心。

1658 年，英國的建築師兼數学家、著名的倫敦聖保罗大教堂穹頂的建築者連氏，曾經定出了擺綫的拱弧的長。他的發現是驚人的，因为在当時，計算曲綫弧長的問題似乎是異常困难的，只有个别的幾种曲綫（圓周、拋物綫和幾种螺綫）才計算得出。我們現在來談一下連氏用的方法，但是略去証明上的細節。然後，我們再回过來用完全不一样的方法來計算出擺綫的拱弧的長。

連氏是从和托里拆利和罗別尔瓦里早期工作類似的力学思考出發的。他观察滾動（母）圓繞着 T 點（圖 33）而轉動一个極其微小的角 α 時的情況。这時候，圓心从 O 點移到 O_1 點，因而角 OTO_1 剛好等於 α。弦 TM 也轉了同样的角度，而 M 點在描过擺綫的一小段弧之後，移到了 M_1 點。照連氏的想法，我們假定角 α 極小，小到使擺綫的弧 MM_1 和以 T 點为圓心、TM 为半徑的圓周的弧不可能區別開來。这就是說，我

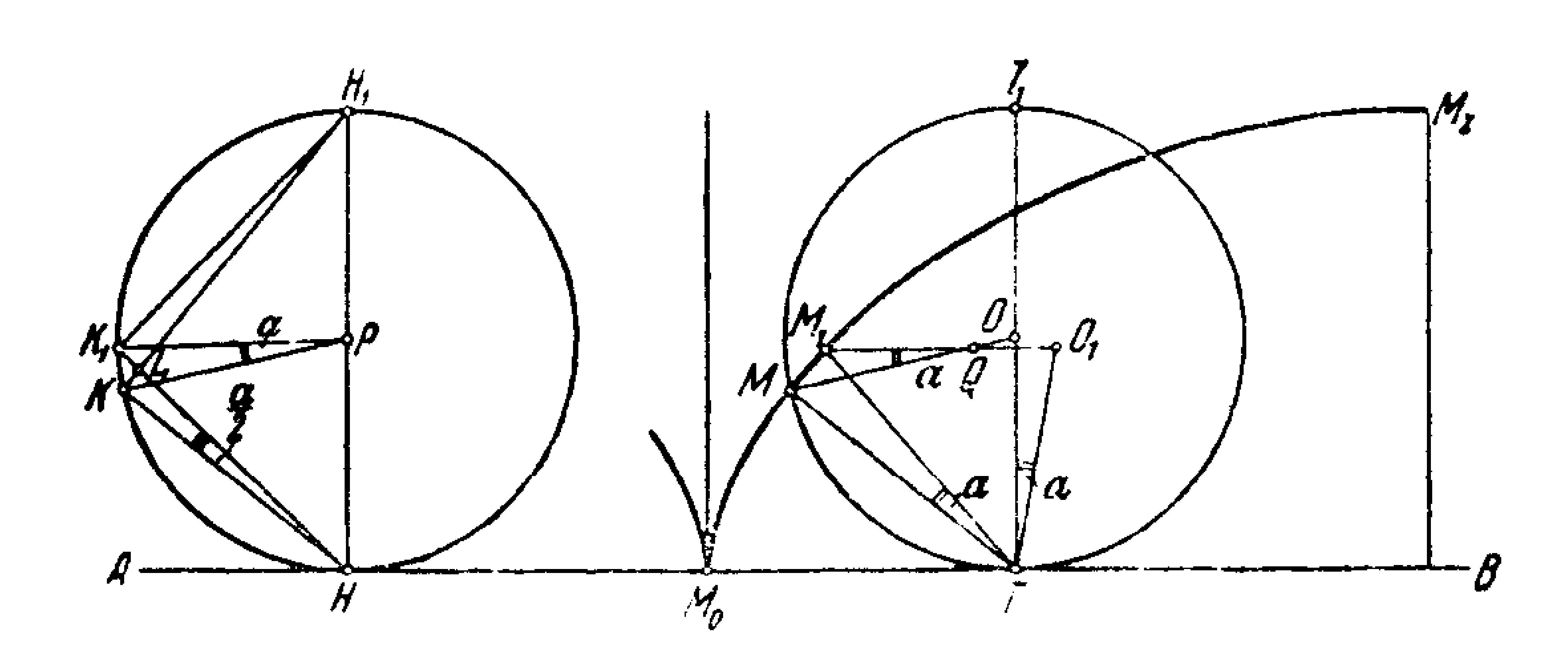


圖 33. 擺綫的弧長

們假定擺綫的小弧 MM_1 的長等於 $MT\ \alpha$（假定角 α 是用弧度表示的）。这時候我們故意容許有一點誤差，但是角 α 越小，这誤差也就越小，因而它的影响也就終於消失了。

这時，三角形 OMT 經一微小的轉動移到三角形 O_1M_1T。OM 边同 MT 边一样轉过了同一角度；因此，OM 和 M_1O_1 之間的角，也就是 MQM_1 角，等於 α。

現在我們在用 P 作圓心、用 OT 作半徑的圓的左边作半徑 $PK \parallel OM$ 和 $PK_1 \parallel O_1M_1$。顯而易見，角 K_1PK 等於角 α。弦 KH_1 平行且等於擺綫在 M 點的切綫綫段。弦 K_1H_1 不可能和擺綫在點 M_1 的切綫綫段相差太多 —— 本來，当从點 M 移到點 M_1 時，母圓也移動得不多。連氏証明了（虽然这也还多少有些不精確），弦剛好就等於擺綫在 M_1 點的切綫綫段。

角 KHK_1 是圓周角，它和圓心角 KPK_1 对着同一圓弧；$\angle KPK_1=\alpha$，因此，$\angle KHK_1=\frac{\alpha}{2}$。当 M 點移到 M_1 位置時，弦 $MT_1=KH_1$ 所縮減的長度大致等於綫段 KL，这綫段也可

以認为就等於半徑 HK 乘上角 KHK_1(用弧度表示);也就是等於 $HK\cdot\frac{\alpha}{2}$ 或 $MT\cdot\frac{\alpha}{2}$.

和母圓弦長的縮減相对应的是擺綫拱弧長的增加,它等於 MM_1,也正是像我們已經說过的,等於 $MT\cdot\alpha$. 我們得到了下面的結果:当母圓轉動很小時,弦 MT_1 縮減的長等於擺綫的拱弧增加的長的一半.

当然,这个關係並不完全精確;但是,假使我們取母圓轉動 180°,把它分成極微小的部分("轉動元"α),計算弦的相应減少量跟擺綫拱弧的增加量,計算所有这种減少量的和跟所有这种增加量的和,並取極限,——这样,我們就看出,弦長的全部減少量恰好就是擺綫半个拱弧的長的一半. 这時候,弦从 $2a$(当 M 點取最低位置時)減小到 0(当 M 點到達最高位置時). 弦長的減少量共計 $2a$,因此,擺綫半个拱弧的長等於 $4a$,整个拱弧的長就等於 $8a$.

於是,"提示性的推理"指出了:擺綫的一个拱弧的長必然等於母圓半徑的八倍. 結果出於意料之外:要知道,即使像圓周这样簡單的曲綫的長,也沒有像这样簡單,要特別引入無理數 π 才算得出,可是擺綫拱弧的長却可利用有理數(甚至是整數),用半徑來表出!

要想使我們的(正確些說,連氏的)提示性推理具有說服力,还必須研究一系列的輔助定理. 这会使推理变得複雜,並且会使推理失去明顯性;因此,我們就把这些詳節略去. 連氏本人已經很精確的把它做了出來.

讀者也許已經注意到下面的事实. 推導擺綫面積公式和

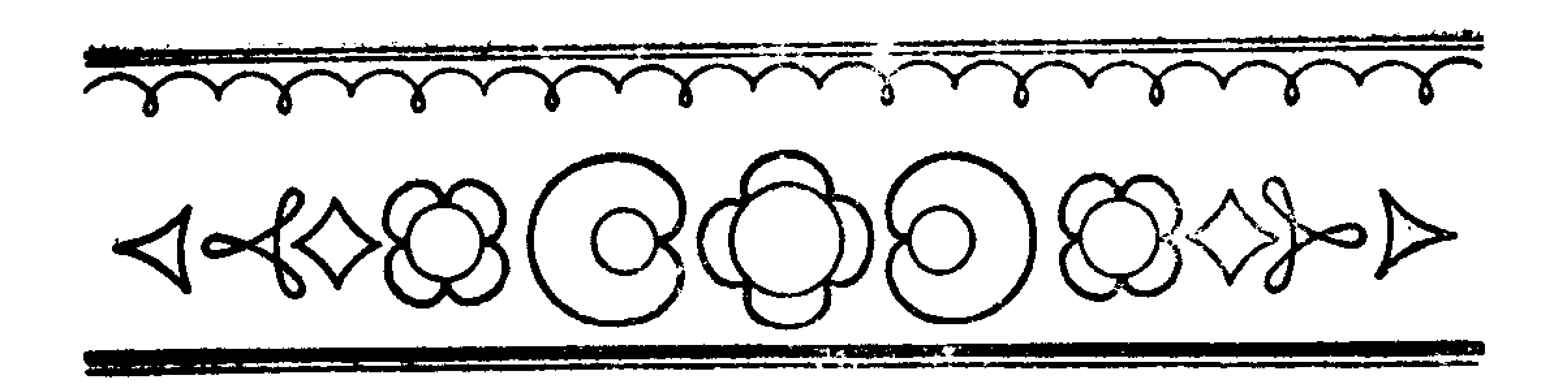
它的弧長公式有關的一切論証，都是非常别出心裁的，跟討論圓周時所用的論証不同．假使有位讀者曾經看到过十七世紀学者們討論某些曲綫(例如拋物綫)的工作，他就会深信，他們的論証也只適应於特殊情形，旣和用於圓周的不同，也和我們在研究擺綫時所碰到的不同．普遍適用的方法是沒有的，每一个研究都需要尋求新的，有時是非常奥妙的方法．

另一方面，讀者也許对經常指出証明的不嚴格一點感到不喜欢，文藝復兴時代学者們所作的各种定理的証明，或者过於複雜而冗長，或者寧可帶一點提示性論証的風格，而不願作嚴格的數学推理．他們常利用力学，虽然在当時看來，好像这就是令人滿意的跟力学無關的幾何說明．

然而生活不待人！自然科学、技術、航海術發展了，要求統一的幾何方法，它能使廣大的專家和实际工作者接受，而不是只能使伽利略和巴斯噶接受．文藝復兴時代的先進学者們越來越感兴趣的，不是解决个别的問題，而是要弄清楚到底該怎麽把曲綫的複雜奥妙的解法統一起來．卡瓦列里、笛卡兒、飛馬、戴劳等數学家，都試圖發現一个解决有關曲綫和曲綫形問題的一般方法．卡瓦列里說出了一条在今天已經是任何十年級学生所知道的原理．笛卡兒和飛馬發明了解析幾何：它是用直綫和方程式之間的關係作基礎的．此外，飛馬还發明了研究各种曲綫的切綫的一般方法．

当牛頓和萊布尼茲的工作在曲綫的切綫作圖問題和这些曲綫所圍的面積計算問題之間建立起重要關係以後，所有这些便由他們的工作宣告結束．牛頓和萊布尼茲作出了非常有

力的、同時也是容易接受的解决許多幾何問題和力学問題的方法，这些方法後來發展成了一門嚴整的科目，称为**数学分析**（**微積分**）．但是使數学分析具有數学观念不可缺少的嚴格性和說服力，却还要經过一百五十年時間。



第三章
擺線族

你和娜塔莎·尼科拉英娜是什麽親戚關係？

倫利波耶道夫

短擺綫和長擺綫

当劇本或小說的作者希望更好的去描寫出他的英雄的特性時，他常常說到这位英雄的親屬．在某些場合，關於親友們的報道是可以使我們能更完全的去分析人物的性格．我們現在暫時也把擺綫本身放一下，而來討論它的近親．要是母圓和準綫，在某种意义上說，算是擺綫的"双親"的話，那末，誰又算是它的兄弟姊妹呢？

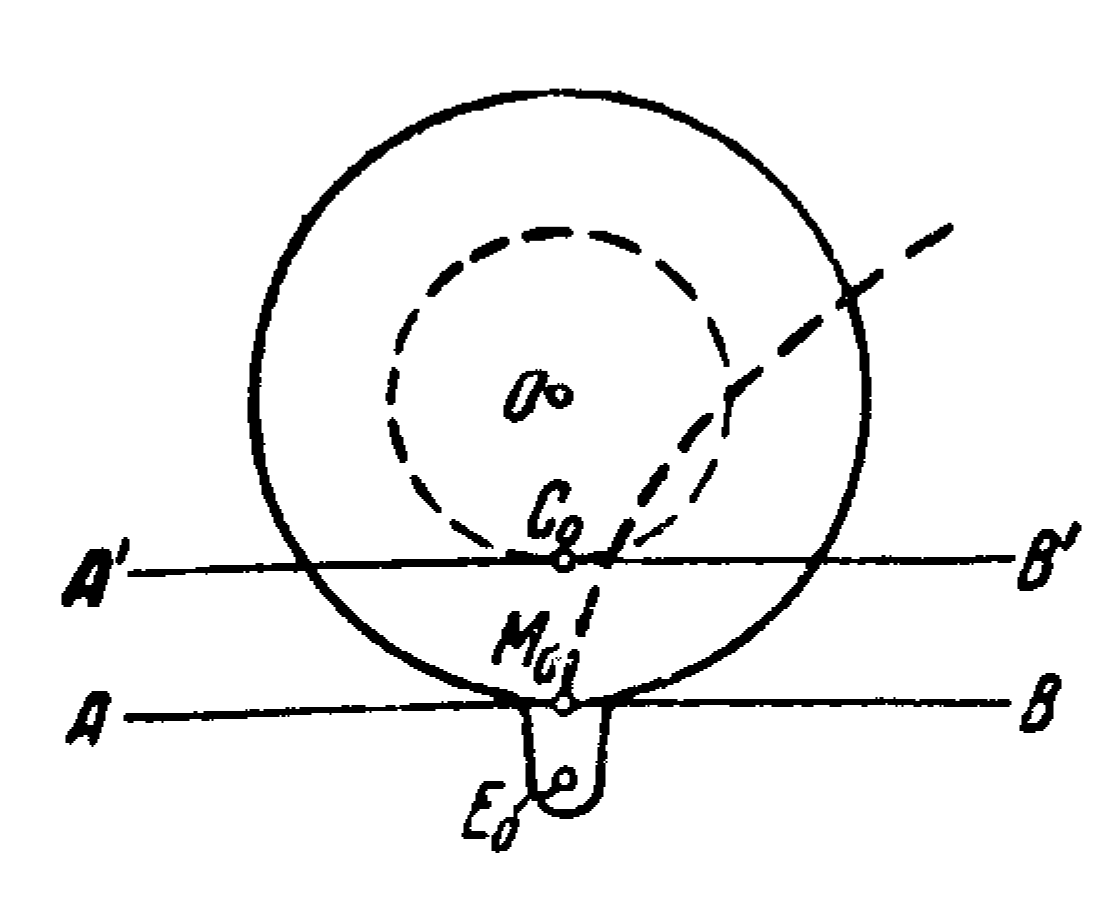


圖 34． 母圓的內點和外點的运動

在圖 34 上，我們画了一个"準备出發"的母圓． 現在，它的點 M_0 画出了一条美麗的擺綫．但是點 C_0 和 E_0 又得到什

麼样的命运呢？點 C_0 不是在母圓的圓周上，而是在它內部的某一个地方．點 E_0 是外點，它和滚動圓緊密連系着．比如說，我們設想这一點是在火車車輪的輪圈（輪綠）上，像圖 35 画的那样．跟內點相似，这个外點也要跟着車輪运動，並且画出某一种曲綫來．

我們現在就來討論这种由滚動圓的外點和內點所描繪出來的曲綫．

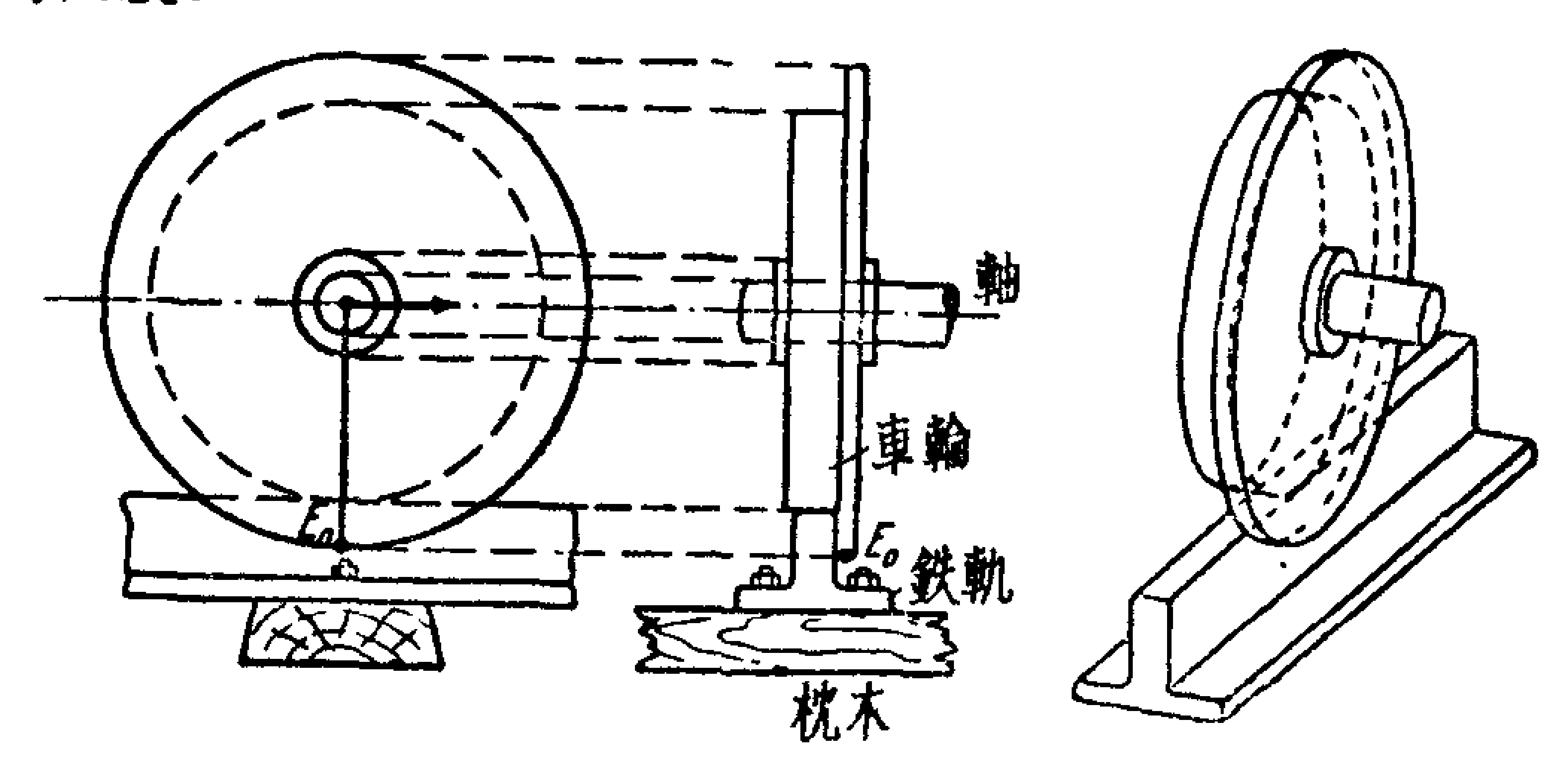


圖 35. 火車車輪輪圈上的點是怎样运動的？

母圓的內點在它运動時描繪出了一条曲綫，叫做"**短擺綫**"．过 C_0 點，我們画一个補助圓（圖 36）．当母圓沿直綫 AB 滚動時，小圓就沿着直綫 $A'B'$ 滚動，但是跟滚動一起，它还有滑動；在分析亞里士多德的詭辯時，我們已經說过这一點

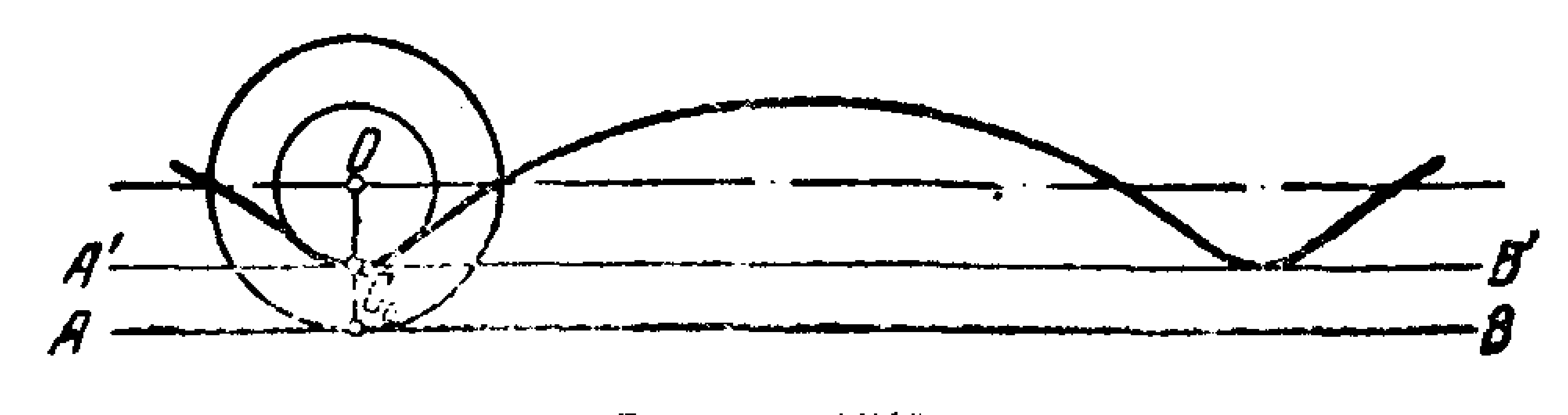


圖 36. 短擺綫

了(第12-13頁)。这样，我們就可以說，短擺綫是由沿準綫連滚帶滑的圓周上的一點画出來的。

跟这相似，圓的外點描繪出一条所謂“長擺綫”。長擺綫也可以看作是由滚動圓圓周上的一點產生出來的曲綫。但是这滚動必然伴隨着反方向的滑動。

讀者可以自己去想出一个逐點作長擺綫和短擺綫的方法。也不难設計出一种实驗工具，像圖5上画的那样。我們

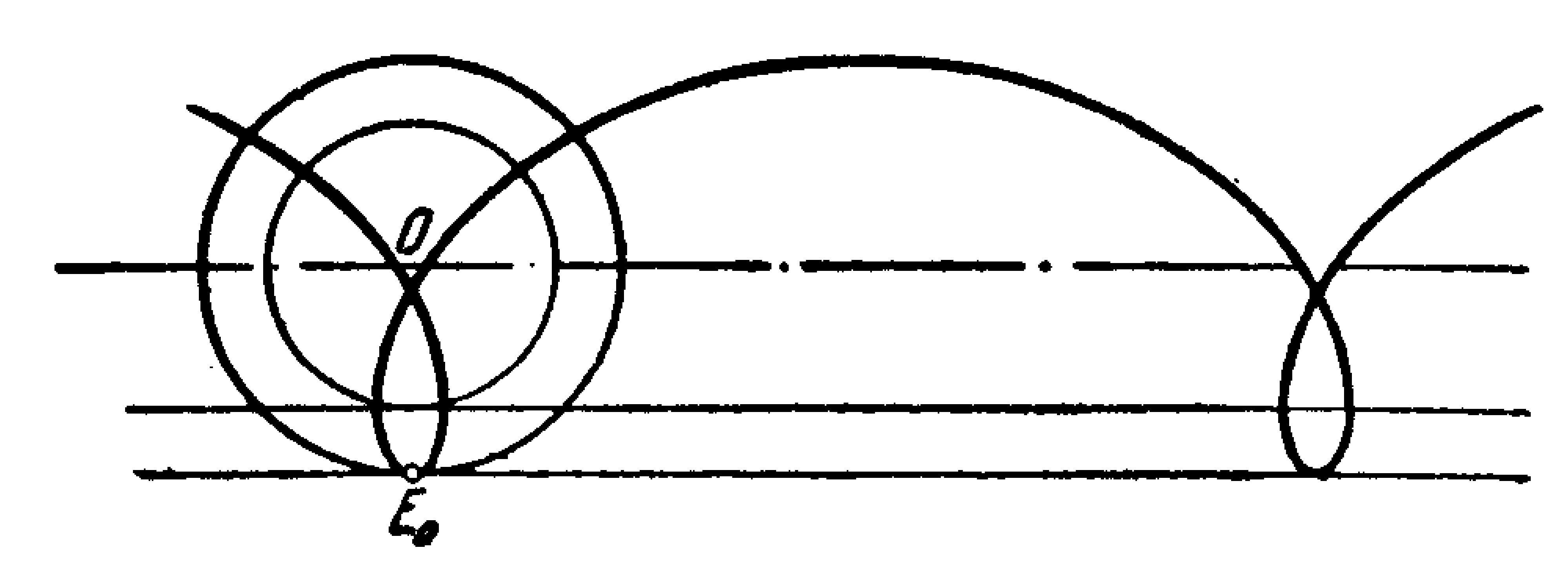


圖 37. 長擺綫

不再把这些詳細分析，立刻就把短擺綫和長擺綫画成“現成的形式”(圖36和37)。短擺綫很有點像正弦曲綫，而長擺綫却是一条有环的美麗曲綫。現在我們把短擺綫和長擺綫都叫做“旋輪綫”㊀，在古代，法國学者們却用这个名字來称呼所有和圓沿直綫滚動有關的曲綫，連普通的擺綫也包括在內。

我們所熟識的托里拆利、卡瓦列里、罗別尔瓦里、笛卡兒，都研究过短擺綫和長擺綫的切綫。連氏曾經証明，这些曲綫的弧長都等於某种橢圓的弧長；这种橢圓，只要知道擺綫的母圓和底的長，就不难把它作出來。这一點，我們不想多說。

㊀ 現在应該叫做次擺綫。——譯者註

我們單來談談这个著名的滑稽問題：火車上哪一點是朝着跟火車运動方向相反的方向运動的？答案很清楚：这是車輪輪圈（輪緣）上最低的一點（圖38的E點）。如果車輪向右滚動，那末，輪緣上的最低部分就向左移動，而輪緣上最低點的运動方向是跟輪心的运動方向相反的。

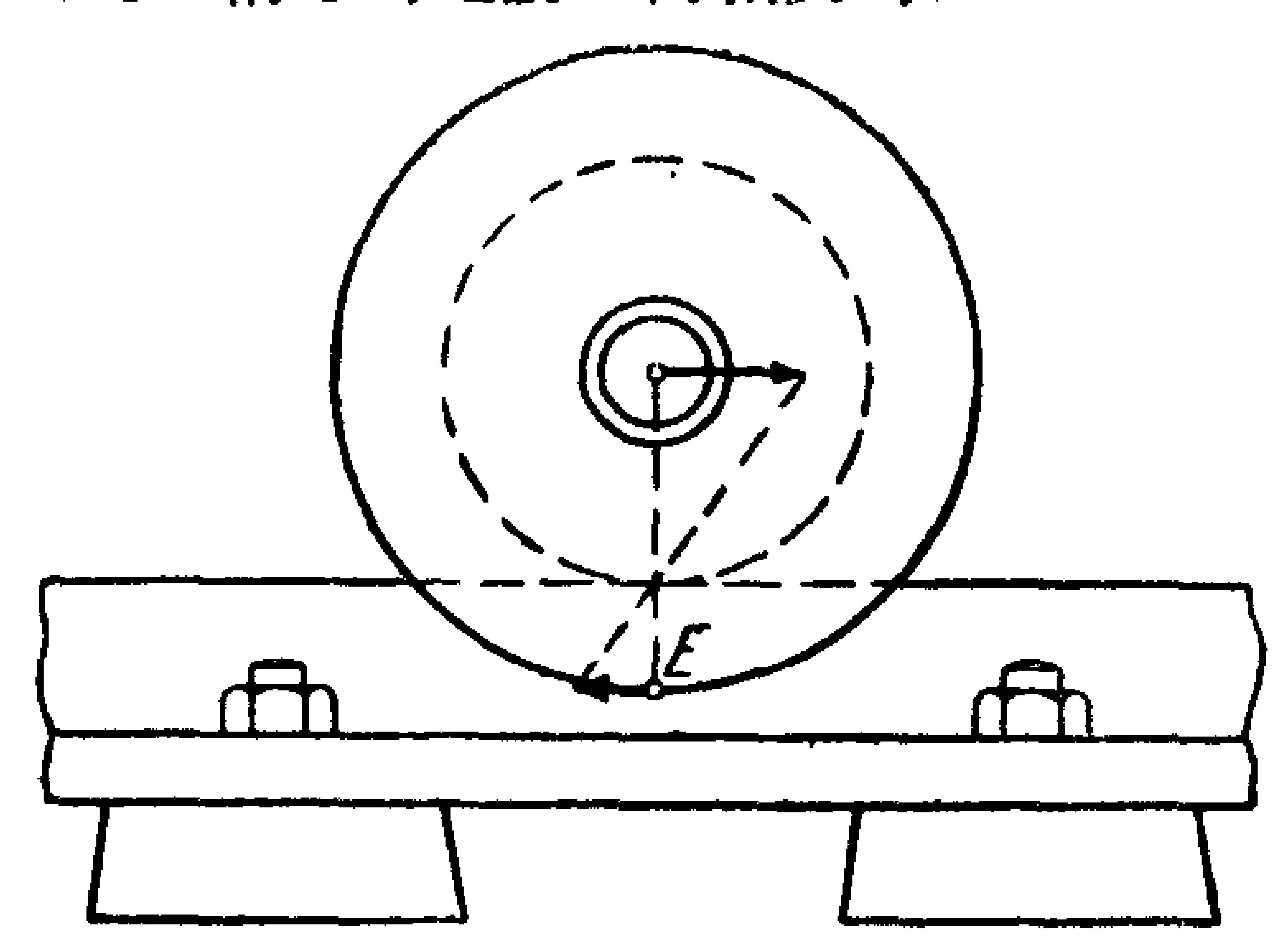


圖38. 滑稽問題的答案

現在你來看这件大家熟悉的玩具——“不倒翁”。圖39上画的就是它。不倒翁的下面部分是半球形的，上面部分却

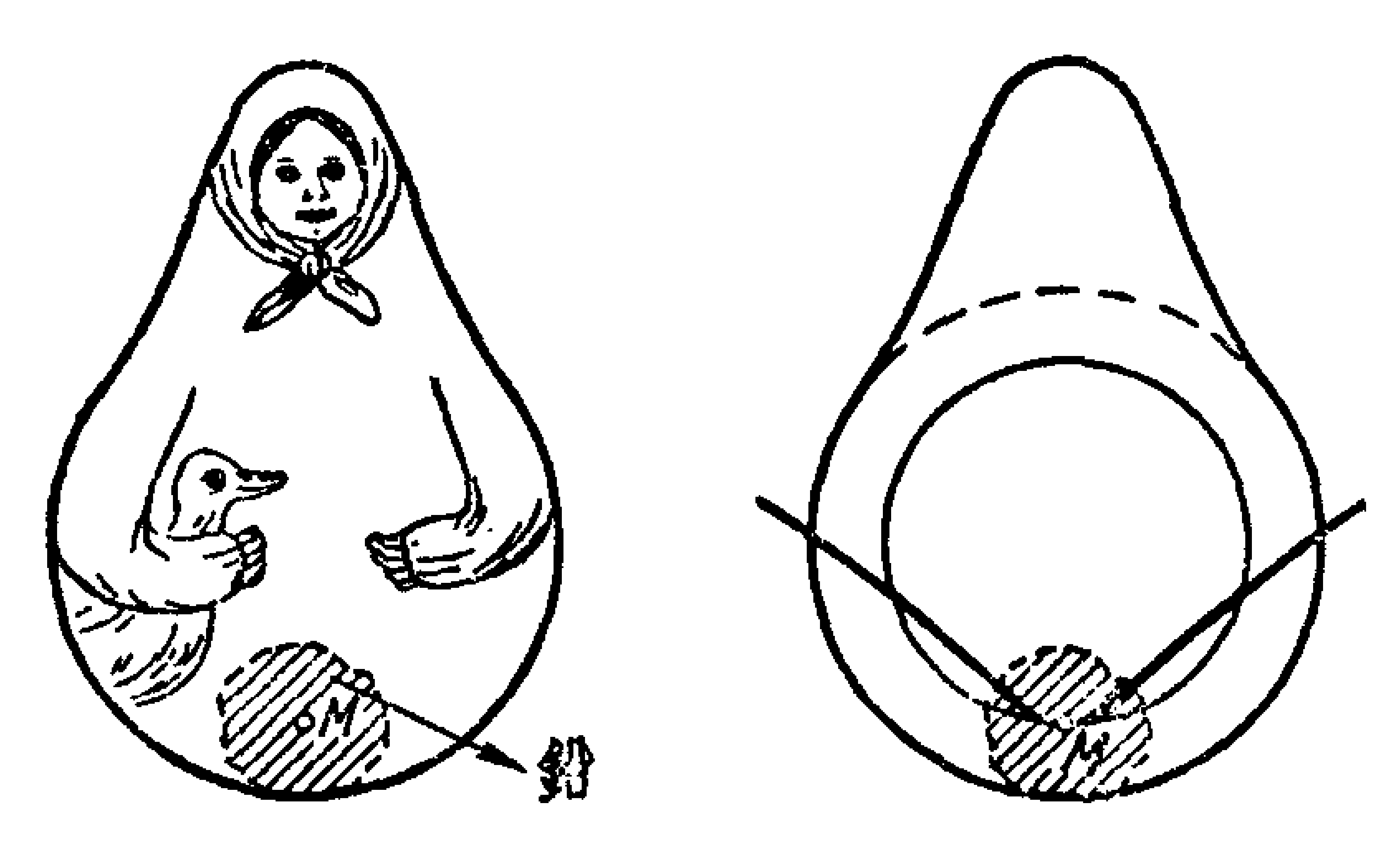


圖39. 不倒翁

沒有什麽異样。它的下部有一塊鉛，因此它的重心就落得非常低（圖39的M點）。如果把小塑像按倒，它的重心就画了一段短擺綫的弧；要知道，在这裏，从本質上說來，我們是在跟沿直綫滾動的圓的內點的运動打交道。要是把它按倒後再鬆手听它自便，那末，它就会搖來擺去，使它的重心保可能落得低，这也就是說，“不倒翁”將回復到直立狀态（站起來）。

外擺綫

說过擺綫的親姊妹之後，我們現在來談談它的堂姊妹。我們仍舊叫母圓滾動，但是不叫它沿直綫滾而叫它沿另一个圓的圓周外面滾。根据定圓和動圓（**準圓和母圓**）半徑的比例，就会得出不同的、然而是同類的曲綫。所有这种曲綫通称**外擺綫**。

我們先來談母圓半徑比準圓半徑小一倍的那种外擺綫。在这种情形，就得到了一条像圖40上画的有兩个尖點——“歧點”——的曲綫。要是“定圓”半徑是動圓半徑的三倍、四倍或六倍，那末就分別得到圖41，42，43上画的曲綫。

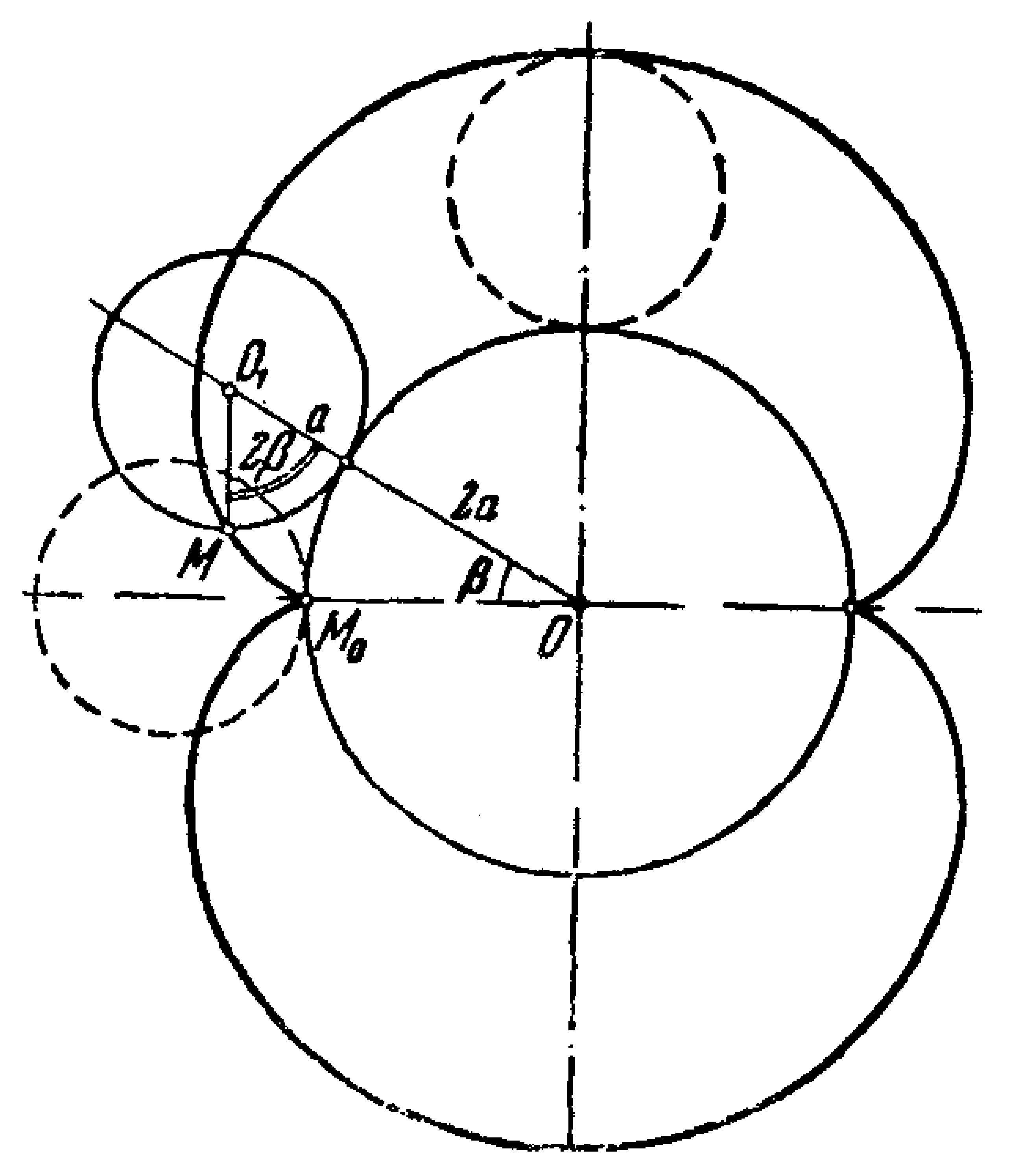


圖 40. 有兩个尖點的外擺綫

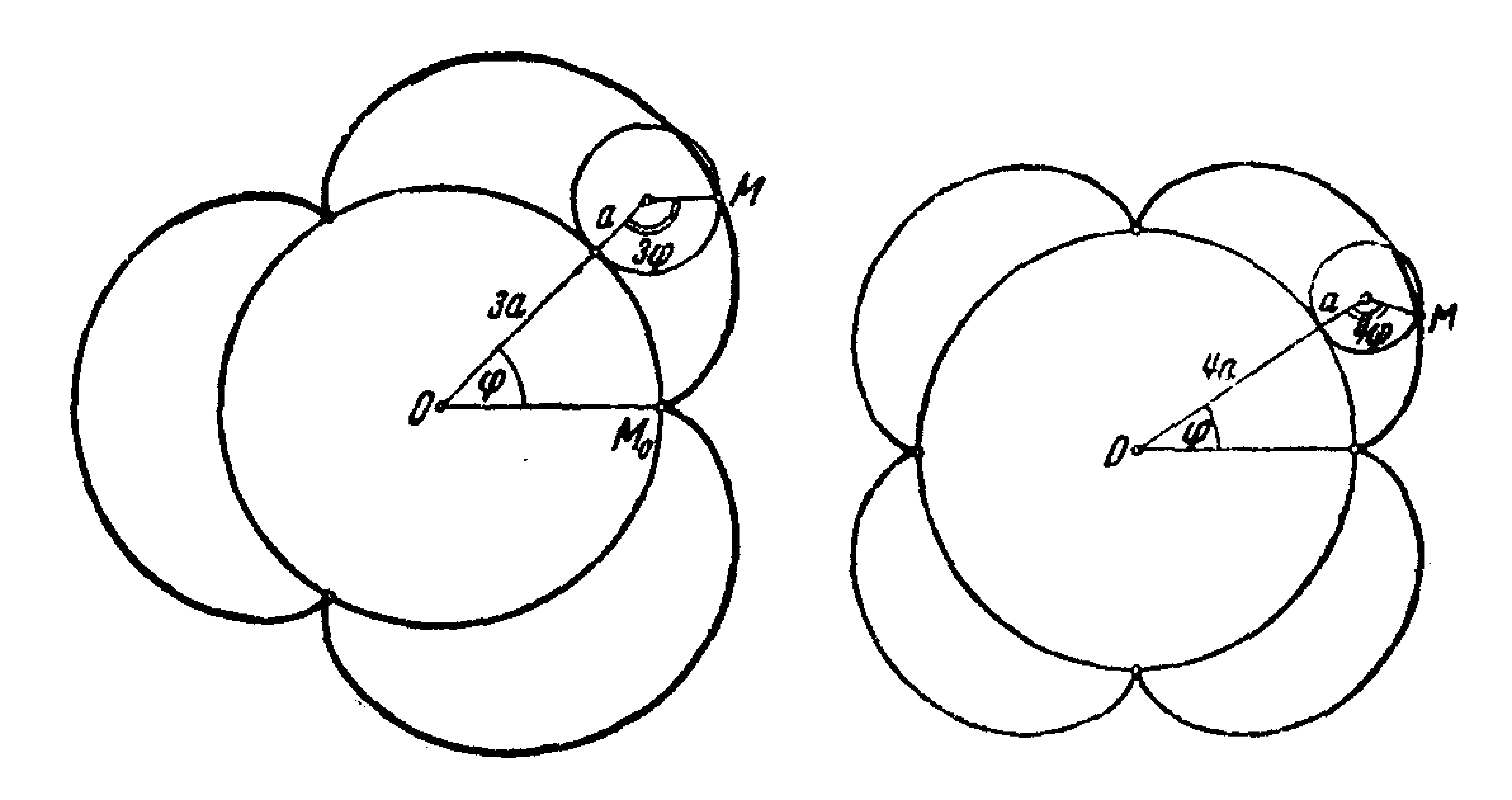


圖 41. 有三个尖點的外擺綫　　**圖 42.** 有四个尖點的外擺綫

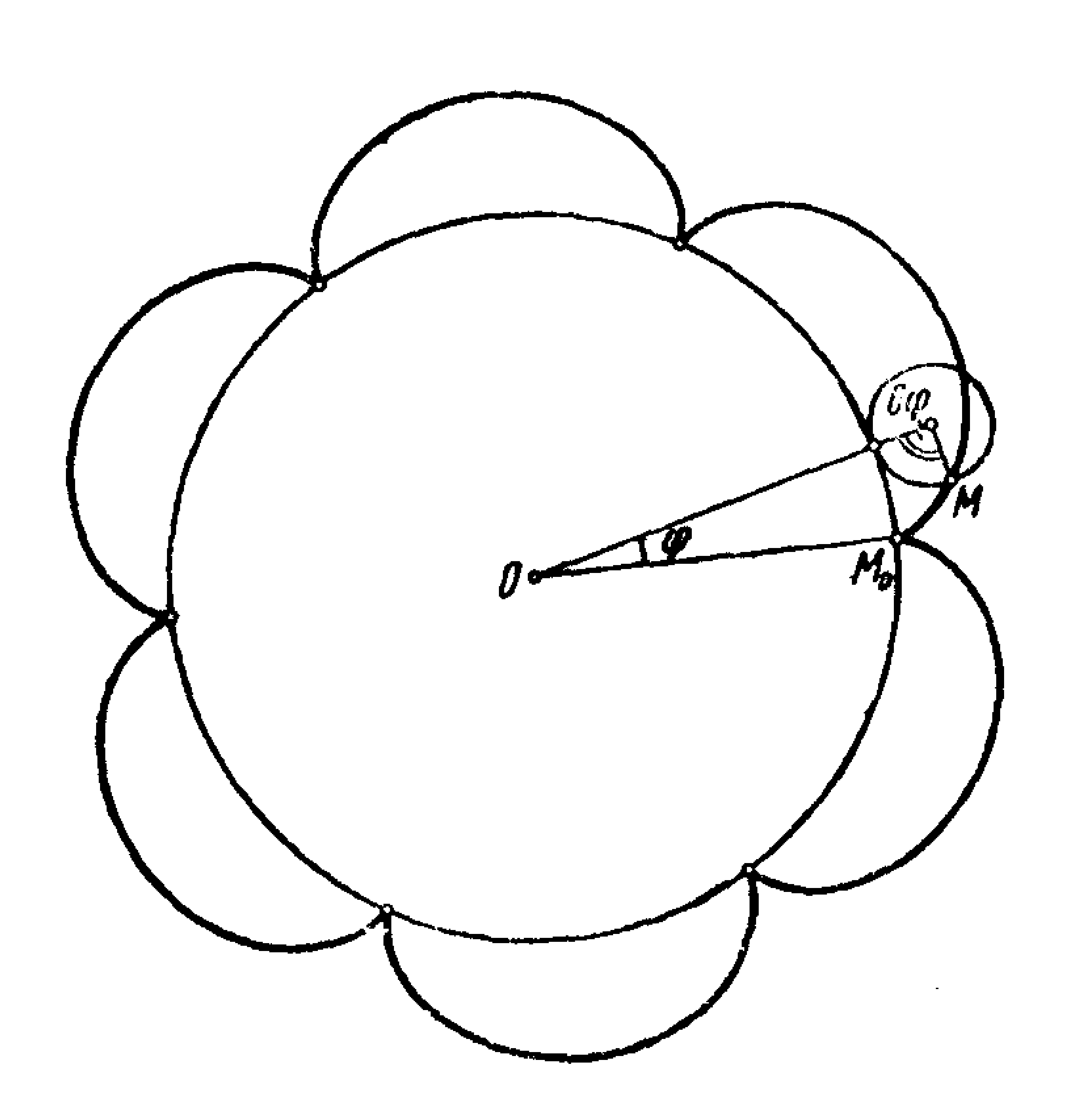


圖 43. 有六个尖點的外擺綫

就是那些研究过普通擺綫的学者們，建立了作各种外擺綫的切綫的法則，以及外擺綫的量度性質（就是和計算它的拱弧的長、它所圍的面積等等有關的性質）．这些性質的推算，和普通擺綫的相应性質的推算非常相似；我們現在立刻來報道現成的結果．

我們來看圓心是 O 的準圓（圖 44）．設 M_0 點是具有三个尖點的外擺綫的歧點（如果不是三个歧點的，論証也差不多沒有什麼改変）．再設 O_1 點是動圓（母圓）的圓心（这个圓在圖 44 上是用虛綫画出的）．我們來作外擺綫上跟母圓上 M_0 相应的點 M．如果我們用 φ 來表示角 O_1OM_0，那末角 OO_1M 一定等於 3φ（当然，滾動是看作沒有滑動的）．圓心 O_1 沿着垂直於 OO_1 的方向运動；M 點也参加了这一个运動．此外，M 點还参加了繞着圓心 O_1 轉的轉動．用跟普通擺綫完全一样的論証，就可以導出結果：外擺綫的切綫經过母圓的“最高點”(A)，而法綫却經过“最低點”(B)．

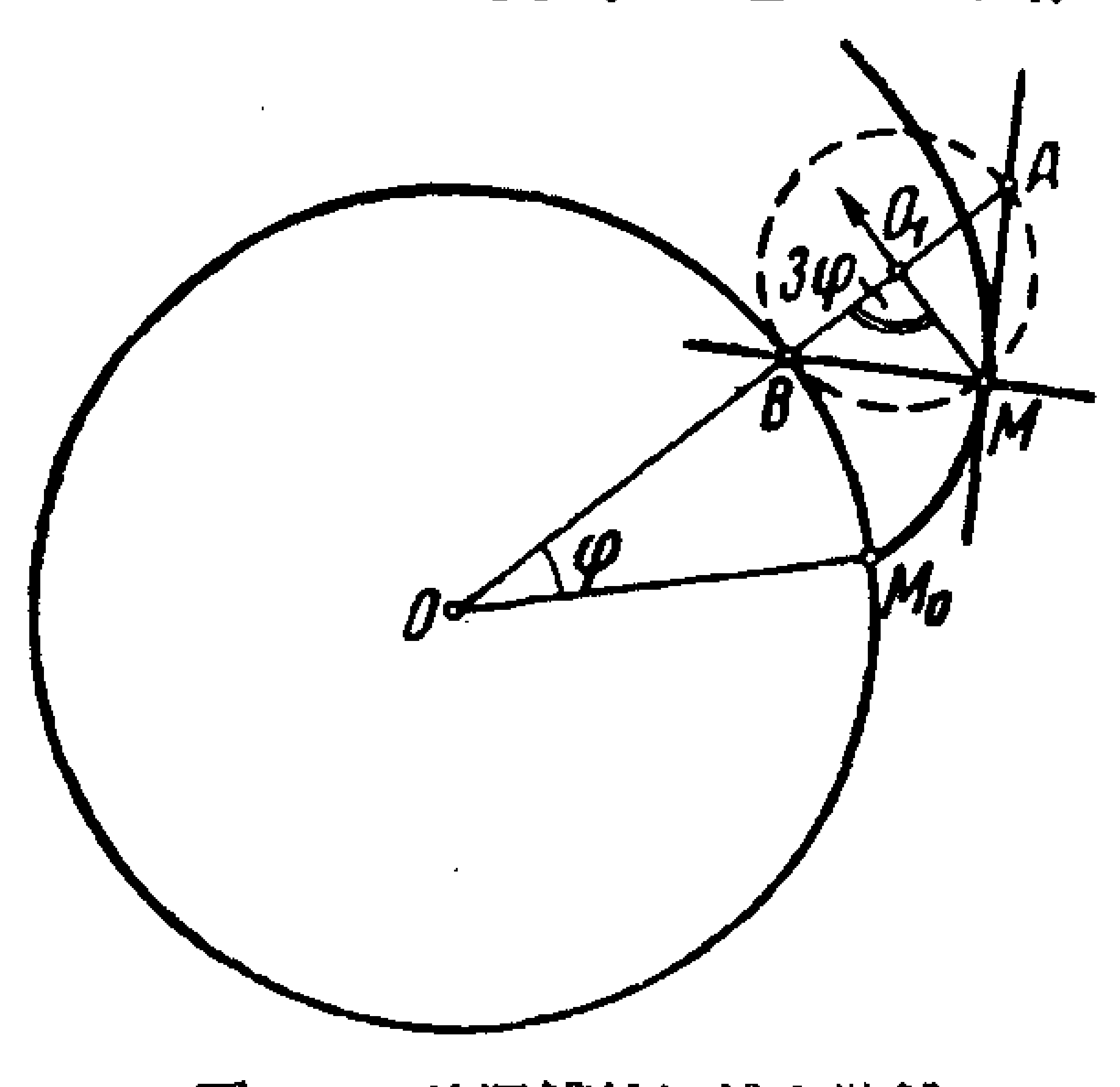


圖 44． 外擺綫的切綫和法綫

和对普通的擺綫一样，我們用字母 a 來表示母圓的半徑．在普通擺綫，數目 a 就可以完全把擺綫決定（就像圓周完全可以从它的半徑決定一样）．在外擺綫的情形，还必須要說出另一个數目：就是必須要說出定圓的半徑是動圓的半徑的幾倍．这个

數目，我們將用字母 n 來表示．在具有兩个歧點的外擺綫，$n=2$，在具有十个歧點的外擺綫，$n=10$，其他的類推．对於圖 40,41,42,43 上画的外擺綫，數目 n 就分别等於 2,3,4,6.

用了这些記号，具有 n 个尖點的外擺綫的一个拱弧的長，我們得到下面的公式：

$$l_1=\frac{8(n+1)a}{n}.$$

普通擺綫，和直綫一样，是無限的，因此就不可能談論它的全長．相反地，外擺綫是有限的（像圓一样）．所以就可以同它的拱弧的長一起來談它的全長，当然也就是它一个拱弧的長的 n 倍．

外擺綫的全長是：

$$l=n\cdot l_1=8a(n+1).$$

完全一样，談到面積，我們可以求出定圓和一个拱弧所圍的面積的公式，也可以求出閉曲綫——外擺綫所圍的全部面積的公式（簡單的擺綫不是閉曲綫，因而面積本身決不是有限的）．我們用 S_1 來代表準圓和一个拱弧所圍的面積，而外擺綫所圍的全部面積却用 S 來表示．顯而易見，S 等於 S_1 的 r

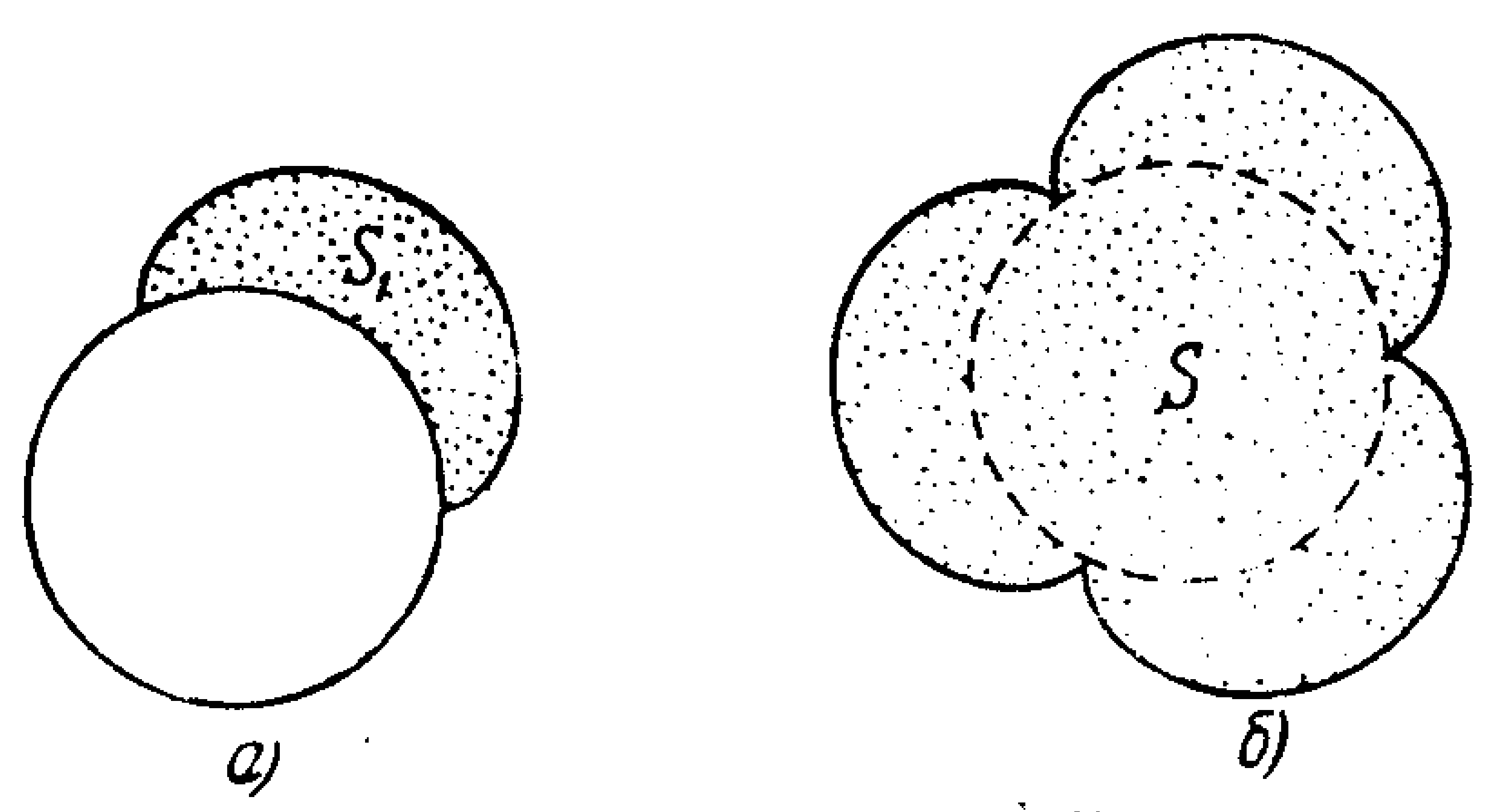


圖 45．外擺綫所圍的面積

倍加上定圓的面積。

这就是 S_1 和 S 的公式：

$$S_1=\frac{3n+2}{n}\pi a^2;\qquad S=(n+1)(n+2)\pi a^2.$$

在圖 45 上，我們用點點出了 $n=3$ 時的面積 S_1 和 S。

我們把 n 等於各种值，也就是具有兩个、三个等等歧點的外擺綫所对应的值 l_1, l, S_1, S 列成一張表。这時候我們要注意，对於所有的外擺綫，動圓都假定是一样大的，而定圓却隨着歧點的數 n 而增大。

	外擺綫			
	具有兩个尖點	具有三个尖點	具有四个尖點	具有五个尖點
l_1	$12a$	$\frac{32}{3}a$	$10a$	$\frac{48}{5}a$
l	$24a$	$32a$	$40a$	$48a$
S_1	$4\pi a^2$	$\frac{11}{3}\pi a^2$	$\frac{7}{2}\pi a^2$	$\frac{17}{5}\pi a^2$
S	$12\pi a^2$	$20\pi a^2$	$30\pi a^2$	$42\pi a^2$

我們現在把擺綫產生的条件作一些修改。我們來研究圓心 O 的圓（圖 46），並假定另外有一个用匀速轉動着的圓的圓心沿着这个圓运動。这時候，轉動圓圓周上的點描出了什麼样的曲綫呢？

在本書開头，当談到托勒密的宇宙系（第 14–15 頁）時，我們曾經碰到这样的問題。实际上，所說的作圖方法使我們得到了托勒密的外擺綫。可是，托勒密的外擺綫是不是就是"眞

正的"外擺綫呢？不難看出，这不是的。要想得出眞正的外擺綫，必須特別去挑选 O_1 點的速度和動圓旋轉的角速度的比（讀者，請你做一下这种計算）。如果動圓在其他比例的速度之下沿着虛點圓（圖 46）帶着滑動而滾動，那末結果得到的不是正規的外擺綫，而是短外擺綫和長外擺綫（圖 47，a 和 б）。

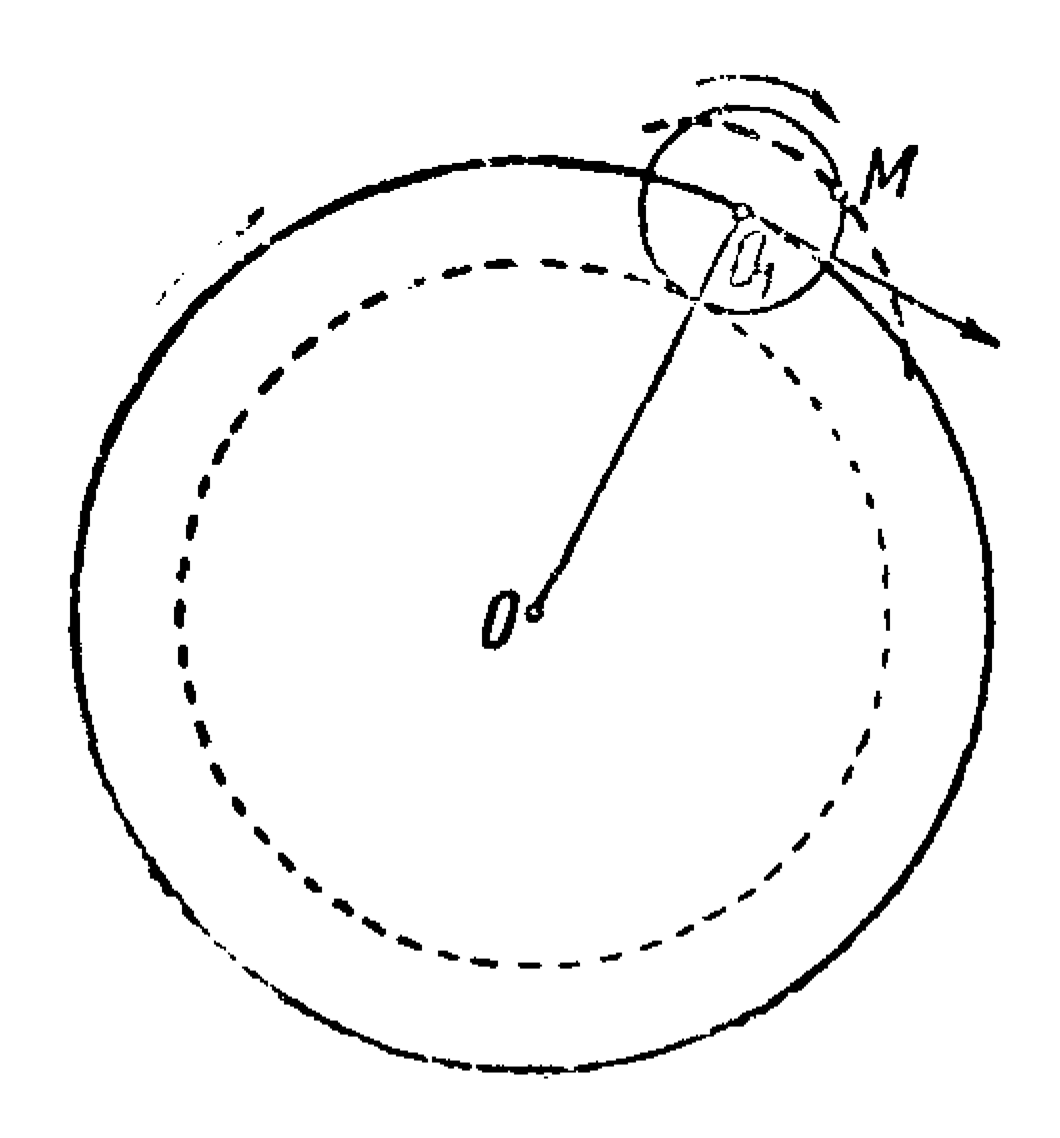


圖 46. 托勒密的外擺綫

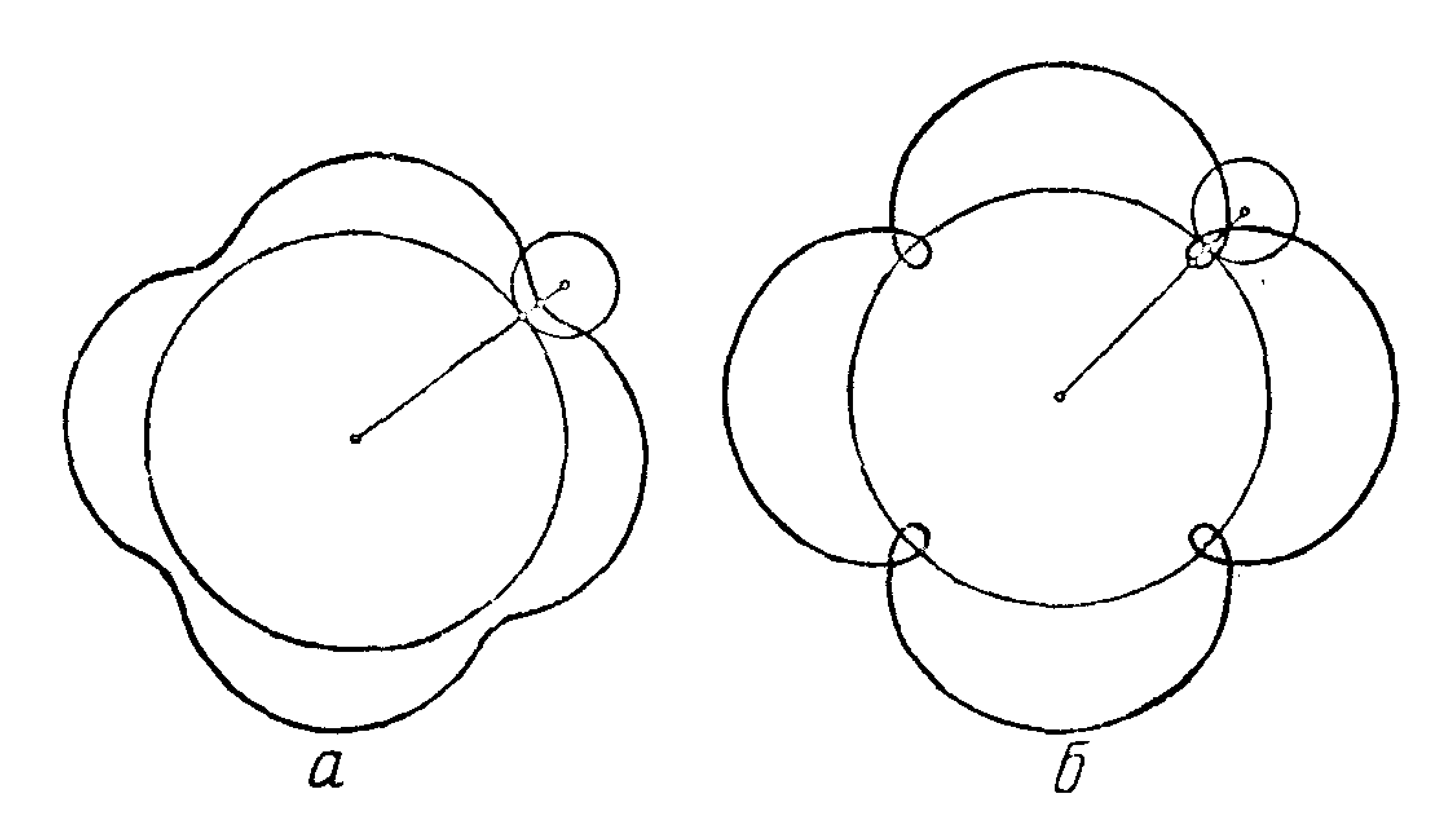


圖 47. 短外擺綫和長外擺綫

我們現在設想，在一个定环（圖 48）外套上另外一个動的环，它的半徑是定环半徑的兩倍、三倍，一般說來，是 n 倍。用幾何学的話來講，我們說，定圓內接於動圓。外面圓上內接於裏面定圓的點，描繪出的曲綫叫做紆迴外擺綫。但是談論紆

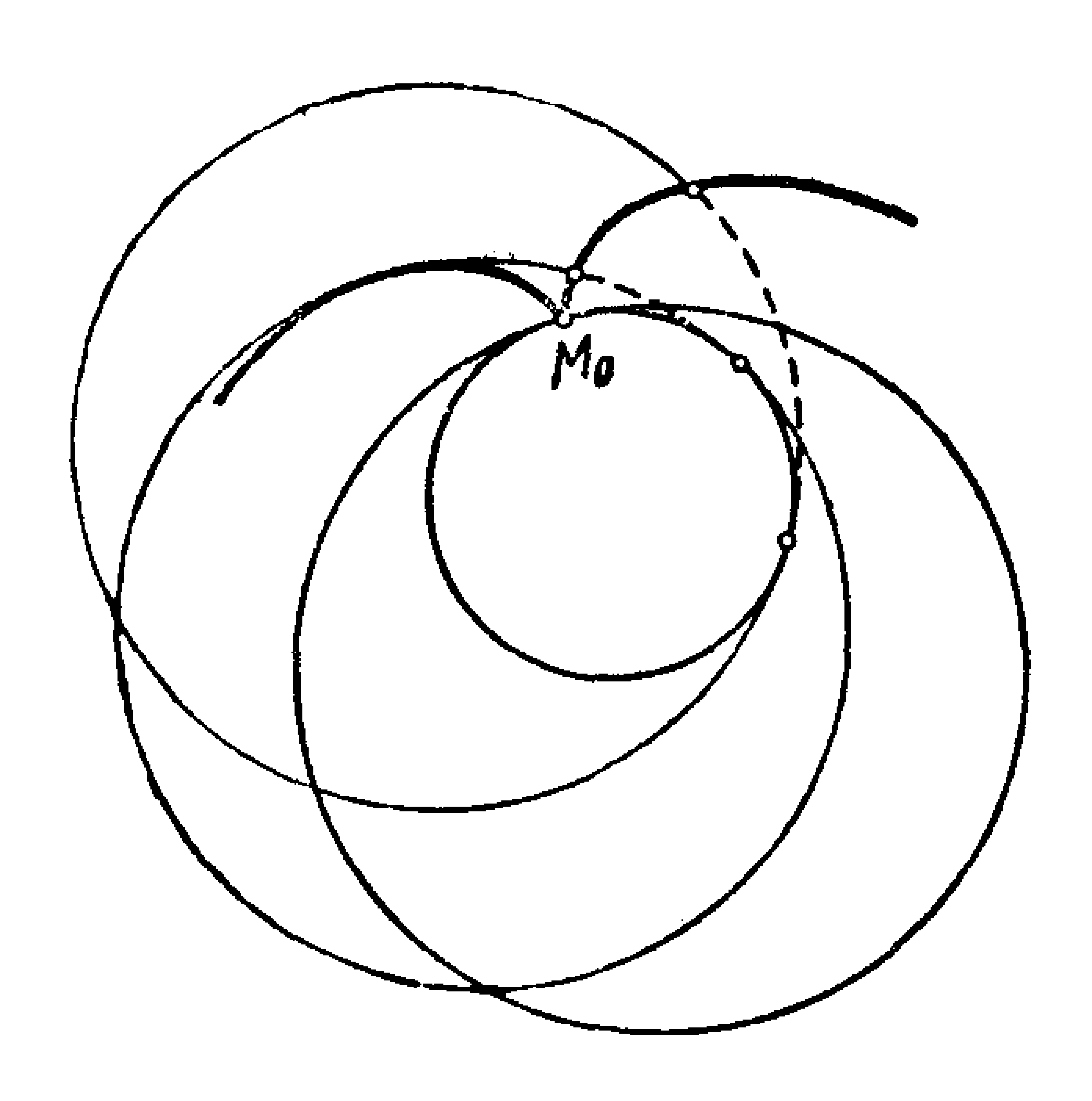


圖 48. 紆迴外擺綫

迴外擺綫的性質，是沒有意义的：因为在更仔細的研究之下，**每一紆迴外擺綫都是某一种外擺綫.**

心臟綫、蚌綫

我們談外擺綫，直到現在都是假定定圓的半徑是動圓(母圓)半徑的多少倍. 然而决沒有人可以阻止我們去研究動圓等於定圓的那种外擺綫，也就是 $n=1$ 的外擺綫. 那种外擺綫叫做**心臟綫**. 因此，心臟綫就是沿着同半徑的定圓滾動(無滑動)的圓周上的點的軌跡. 圖 49 上画的(黑綫)就是一个心臟綫.

關於心臟綫的切綫和法綫，沒有說的必要：它本來就是一种外擺綫($n=1$)，因而具有这种曲綫所共有的各种性質. 只是得注意，对於心臟綫來說，在圖 49 上，角 O_0OO_1 和角 OO_1M

是相等的.

完全一样，心臟綫拱弧的長（它等於曲綫的全長）和它所圍的面積的公式，可以在第50頁的公式裏直接把$n=1$代入得出. 因此，对於心臟綫，我們就得:

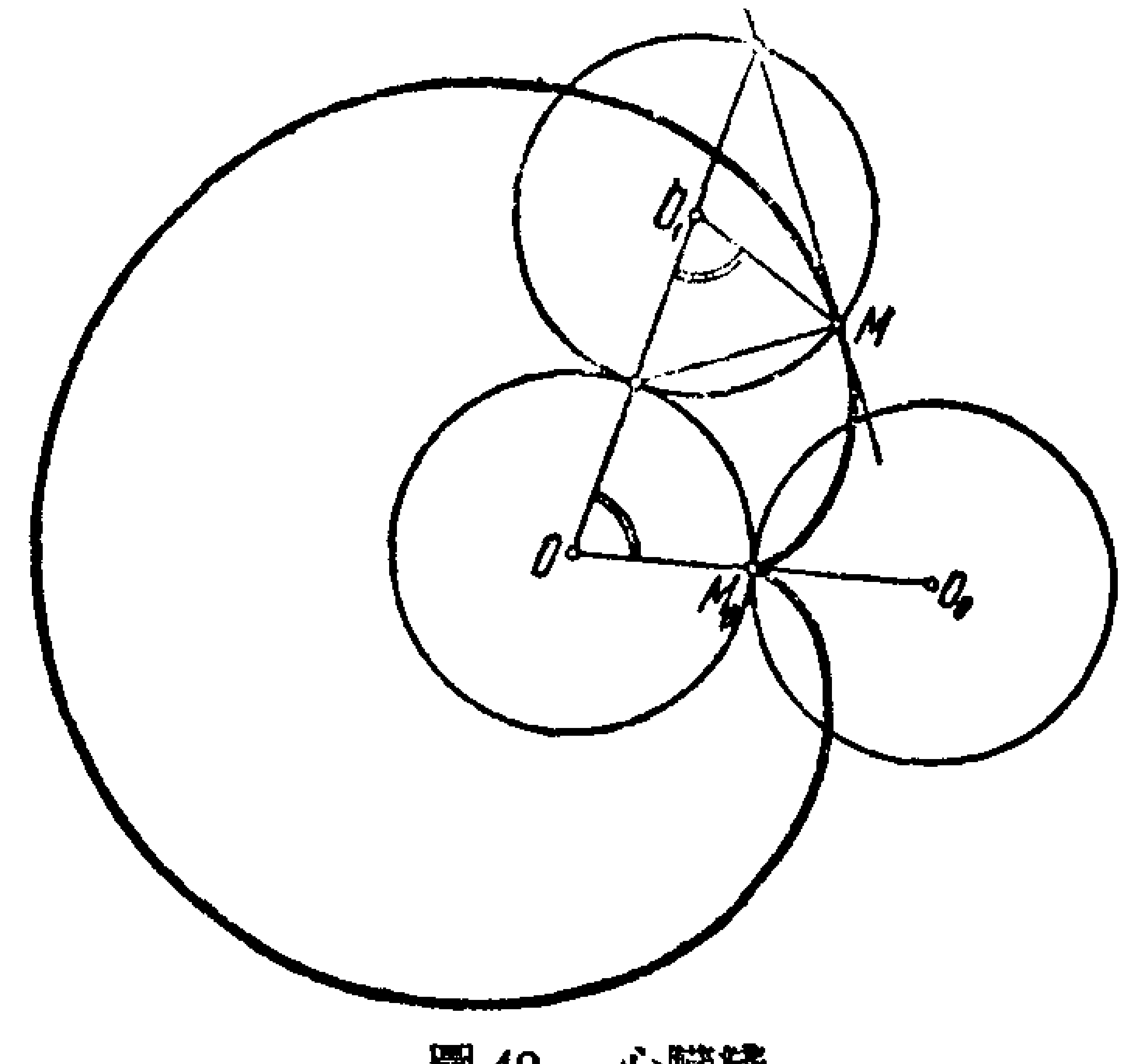


圖 49. 心臟綫

$$l=l_1=16a;$$

$$S_1=5\pi a^2;$$

$$S=6\pi a^2;$$

在圖 50 上，画出了面積S_1和S. 把心臟綫繞着它的对称軸（圖 49 上的OO_0）旋轉所得的体，很像西紅柿（參看圖 51）；它的体積等於$\frac{64}{3}\pi a^3$.

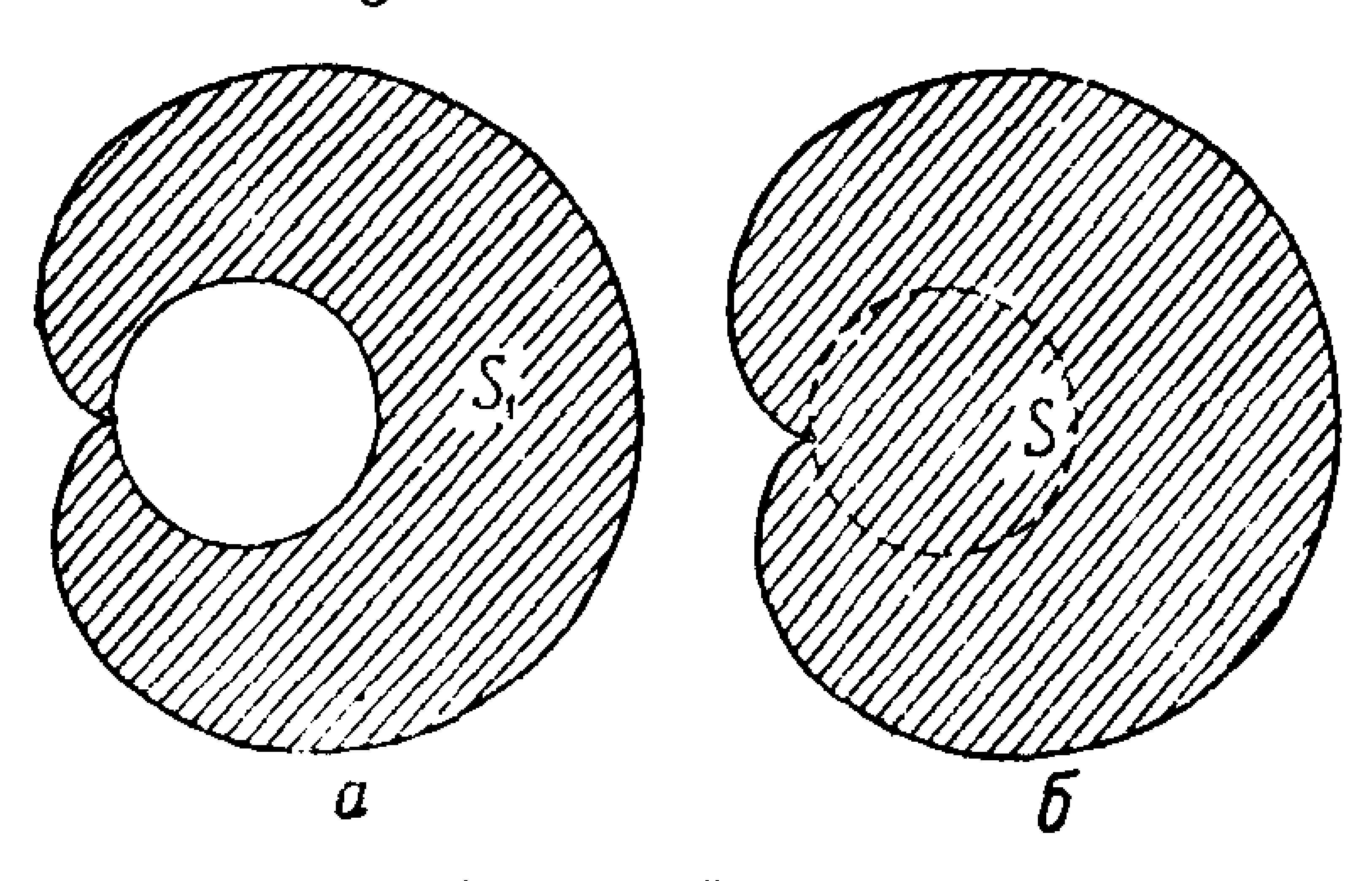


圖 50. 心臟綫的面積

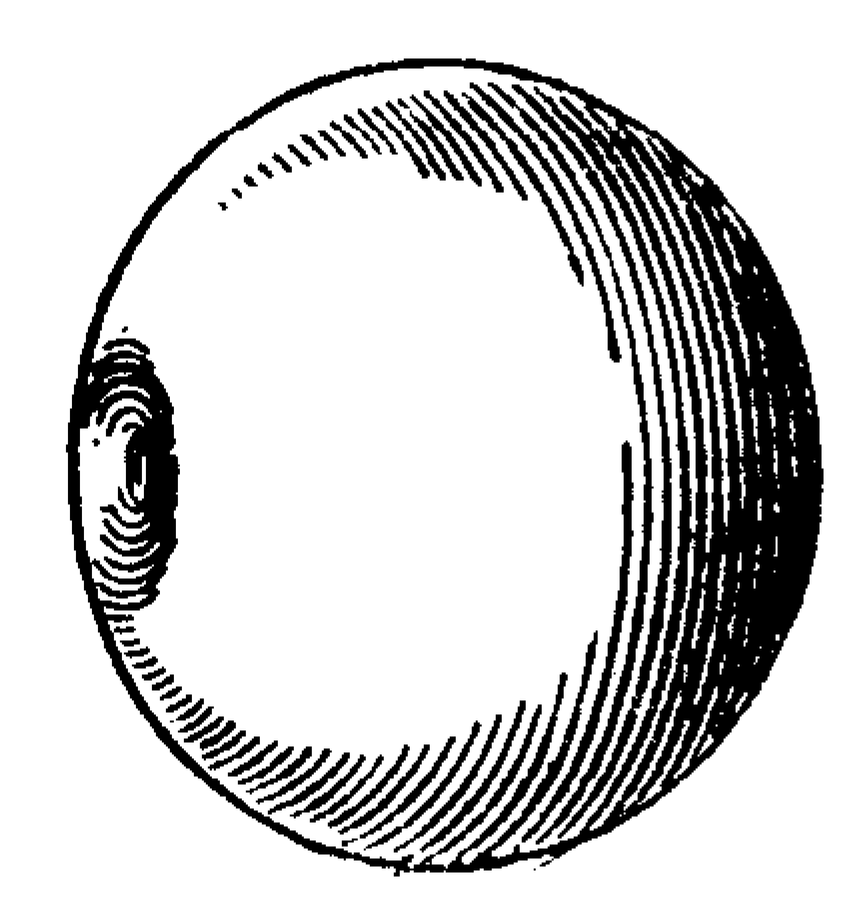


圖 51. 心臟綫產生的旋轉体

心臟綫具有下面的重要性質．把心臟綫上的任意一點 M 和它的"歧點" M_0 連接起來，像圖 52 上所画．我們來注意弦 MM_0 和定圓的交點K．角 M_0OO_1 和角 OO_1M 是相等的（这一點我們剛才說过了——参看圖 49）．半徑 OM_0 和 O_1M 也相等．这就是說，弦 M_0M 和連接圓心的綫段 OO_1 平行．完全一样，$KO \parallel MO_1$．因此，綫段 KM 等於綫段 OO_1，也就是等於定圓（也就是動圓）的直徑．我們可以把點 M_0（歧點）和心臟綫上的任何點連接起來，在連接歧點和曲綫上的點的弦上，曲綫上的點和定圓上的點 K 中間的那一段，總是等於母圓的直徑．於是，我們就得到了下面的心臟綫作圖法．用 O 作圓心，画一半徑 a 的圓，在圓上任取一

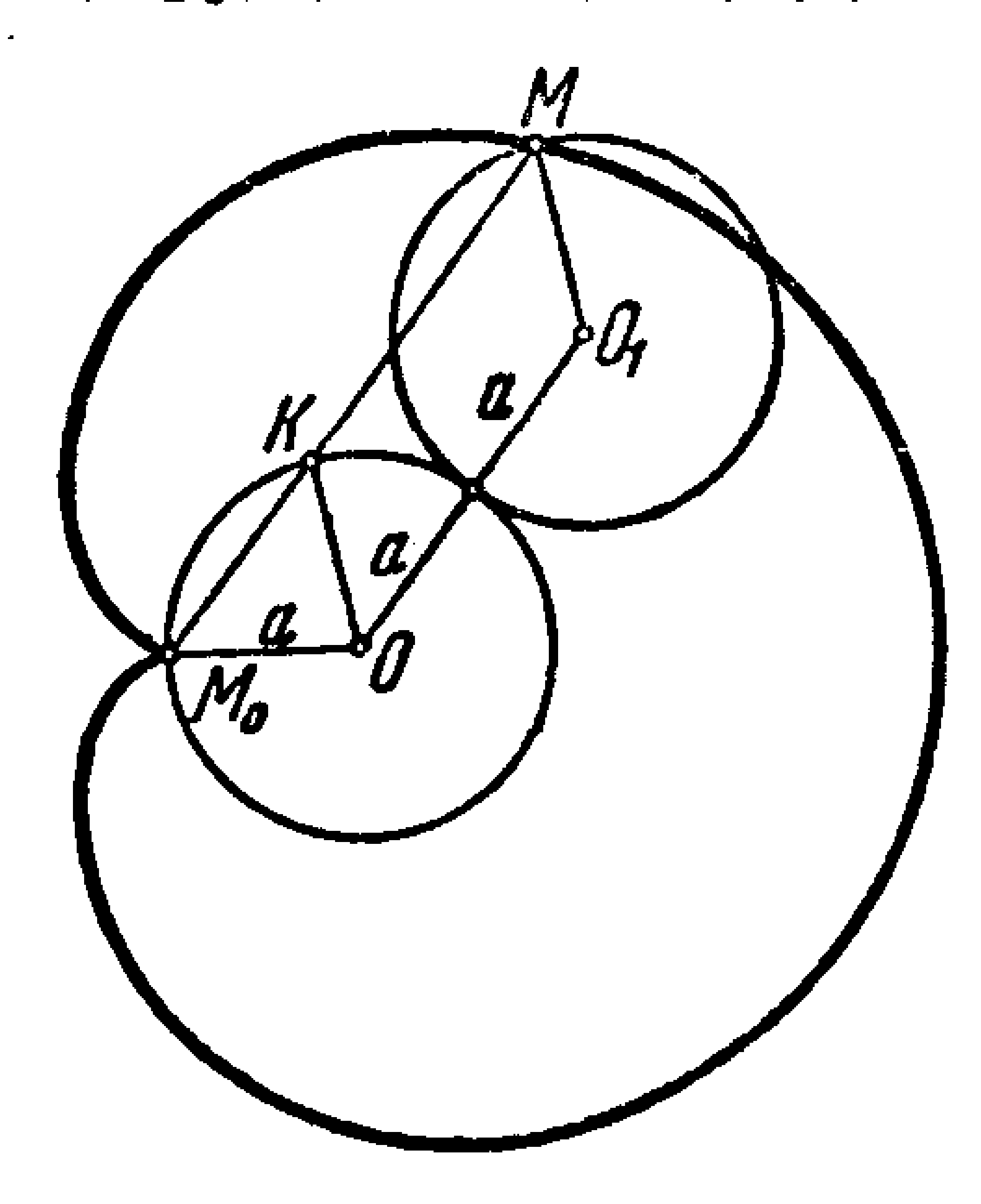


圖 52. 心臟綫的重要性質

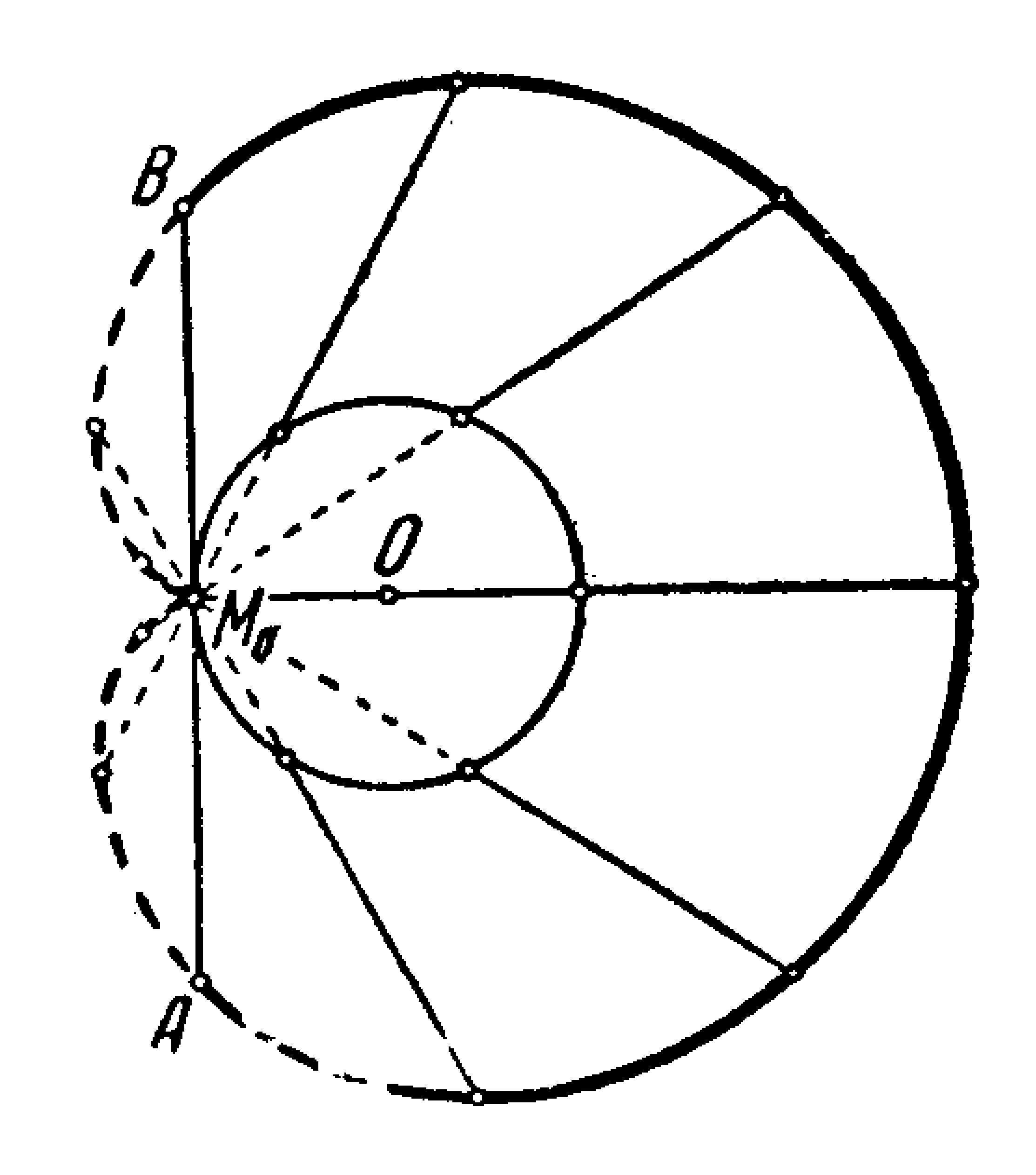


圖 53. 心臟綫的作圖

點M_0（圖 53）。过 M_0 點引一束射綫（在我們的圖上共引了六条射綫；射綫取得越多，得出的曲綫就越精確）。从射綫和圓的交點，沿射綫向兩边引長等於直徑的綫段。用这种方法得出的點的軌跡，就是用粗綫画出的曲綫。它在直綫 AB 右边的部分，根据剛才所說，是心臟綫的弧。讀者，請你証明一下左边（虛綫）部分"粗黑的"曲綫補上这个弧就成完整的心臟綫。

我們暫時把心臟綫放下，來做下面的遊戲。設有一个参加者站在圖 54 上画的 O 點的位置，其餘的人在他的面前排成直綫隊形，但是其中每一个人要轉動一下，使得他自己正对着他的指揮者。在圖上，参加遊戲的人都用短綫表示，而他的視綫方向却用小箭头表示。要是指揮者命令"向後轉"，然後吩咐每个人向前走十步，仍舊保持原來的方向，那末隊形就混乱了：原來的直綫变成一条奇怪的弓形曲綫了。这条曲綫叫做尼哥米德蚌綫⊖，是用研究它的古代希臘学者的名字定名的。

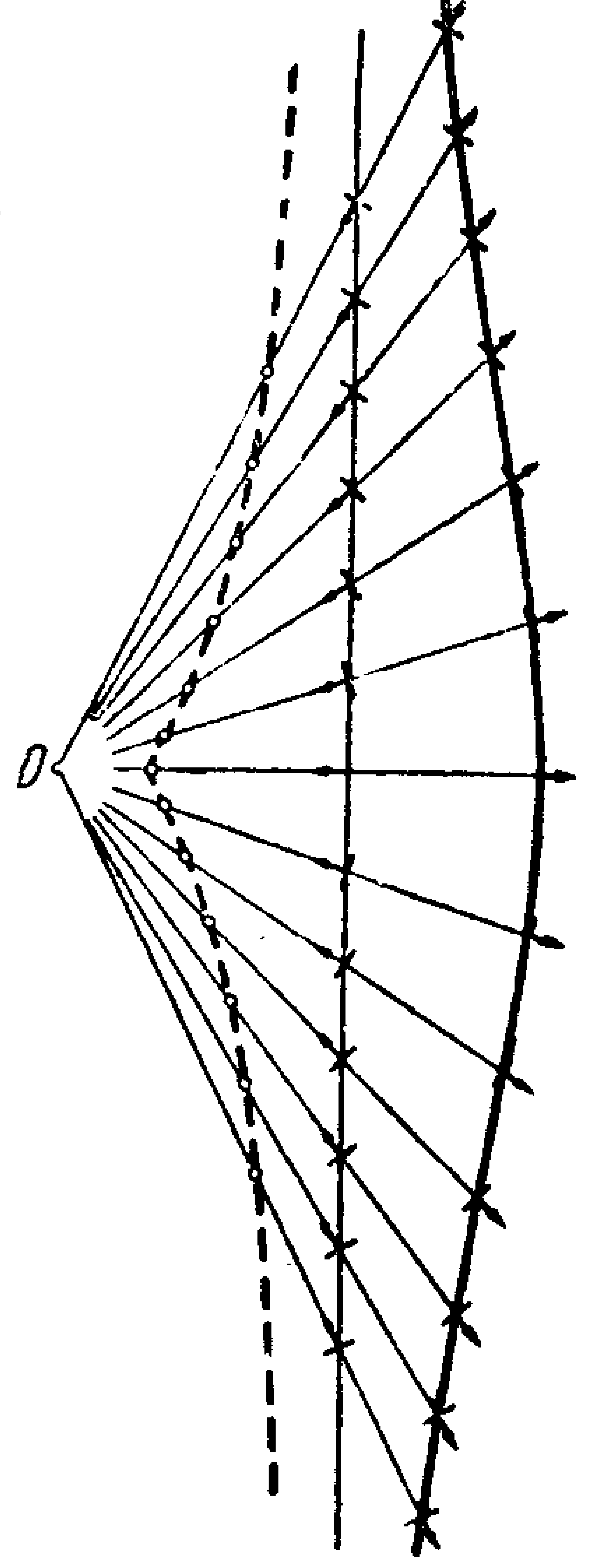


圖 54. 直綫的蚌綫

参加遊戲的人，在開始時可以不

⊖ 精確些說，这只是尼哥米德蚌綫的一半（一枝）。（讀者再讀幾行，就会弄清楚这一點了。）

排成直綫而排成某种曲綫。重要的是他們都要正对着指揮者，並且在命令“向後轉”以後走同样的步數。在这种情形也得到一条曲綫，它也叫做蚌綫。

現在我們來作精確的幾何敍述：設有某一曲綫和點 O（这一點，我們把它叫做“極”）。过 O 點引一束射綫，並且在每一条射綫上从它和已知曲綫的交點向兩边作等長的綫段。这些綫段末端的軌跡就定出新的曲綫，叫做原曲綫關於已知極的蚌綫。我們來注意和剛才說过的遊戲比起來稍微複雜一些的事实。在那裏——参加遊戲的人是朝着一边走；在这裏，綫段却是从曲綫和射綫的交點向兩边引。因此，完整的蚌綫是由兩枝組成的，不过它們有時候却合成了一条曲綫。从这样看來，尼哥米德蚌綫（關於它，根据上面說的，也必須把圖 54 上用虛綫画的左边部分加上去）也就是直綫的蚌綫。

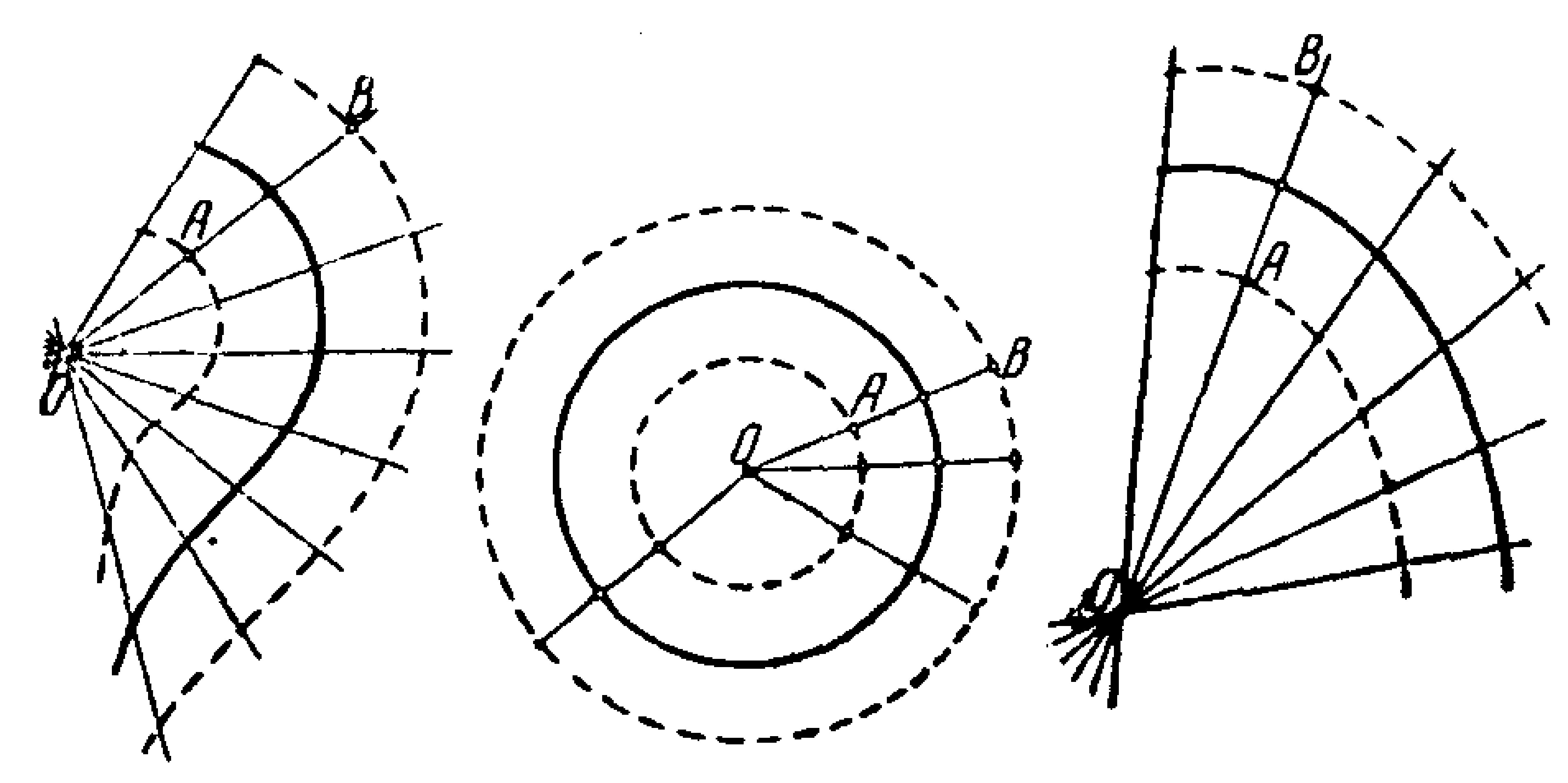


圖 55. 各种曲綫的蚌綫

圖 55 上画的（用虛綫画的），就是各种曲綫的蚌綫。

讀者可以想像，圓關於它圓心的蚌綫是一对圓，它們和已知圓同心，並且和它（圖 55 上中間的圓）等距。

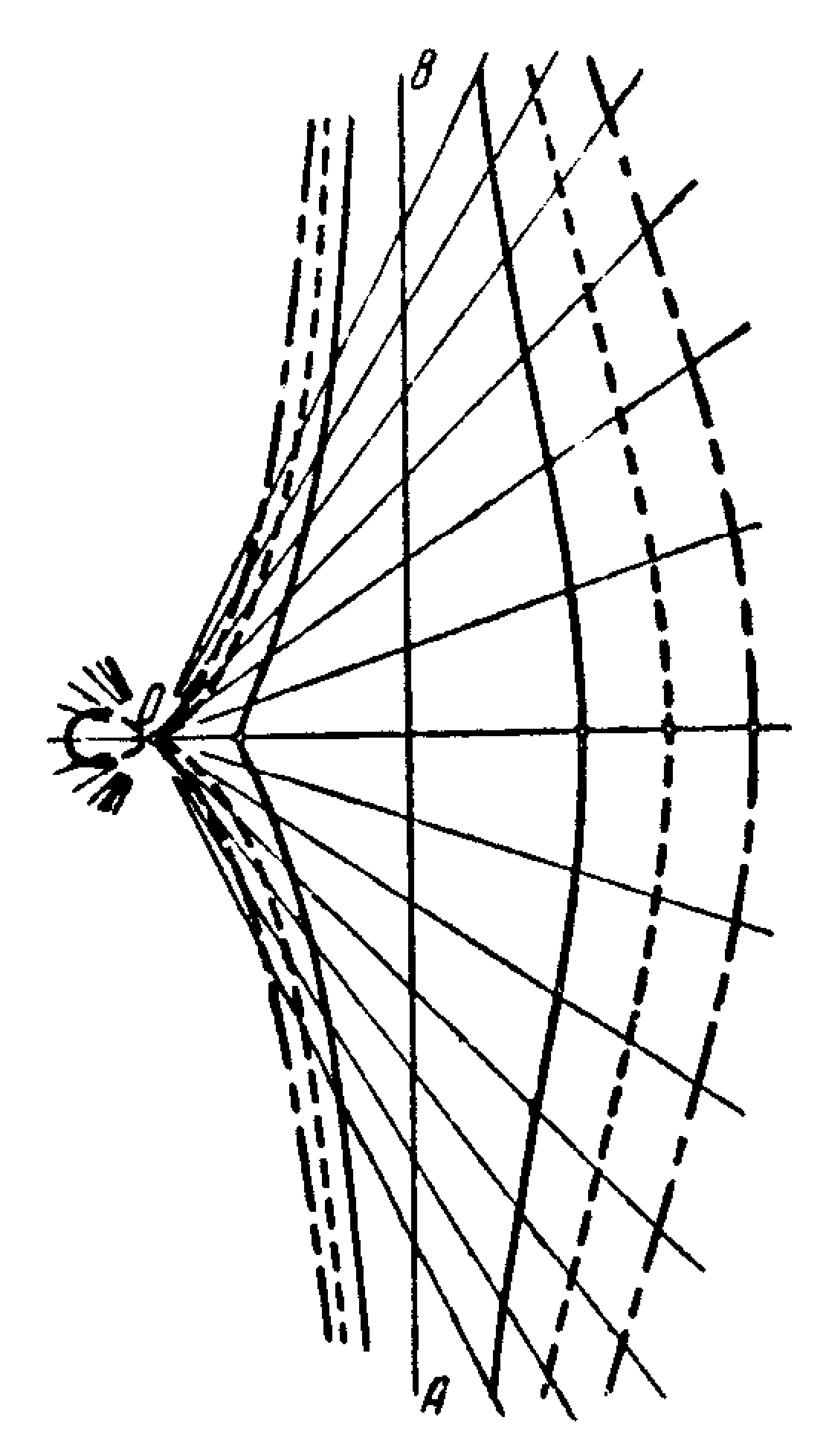


圖 56. 同一直線的各种蚌線

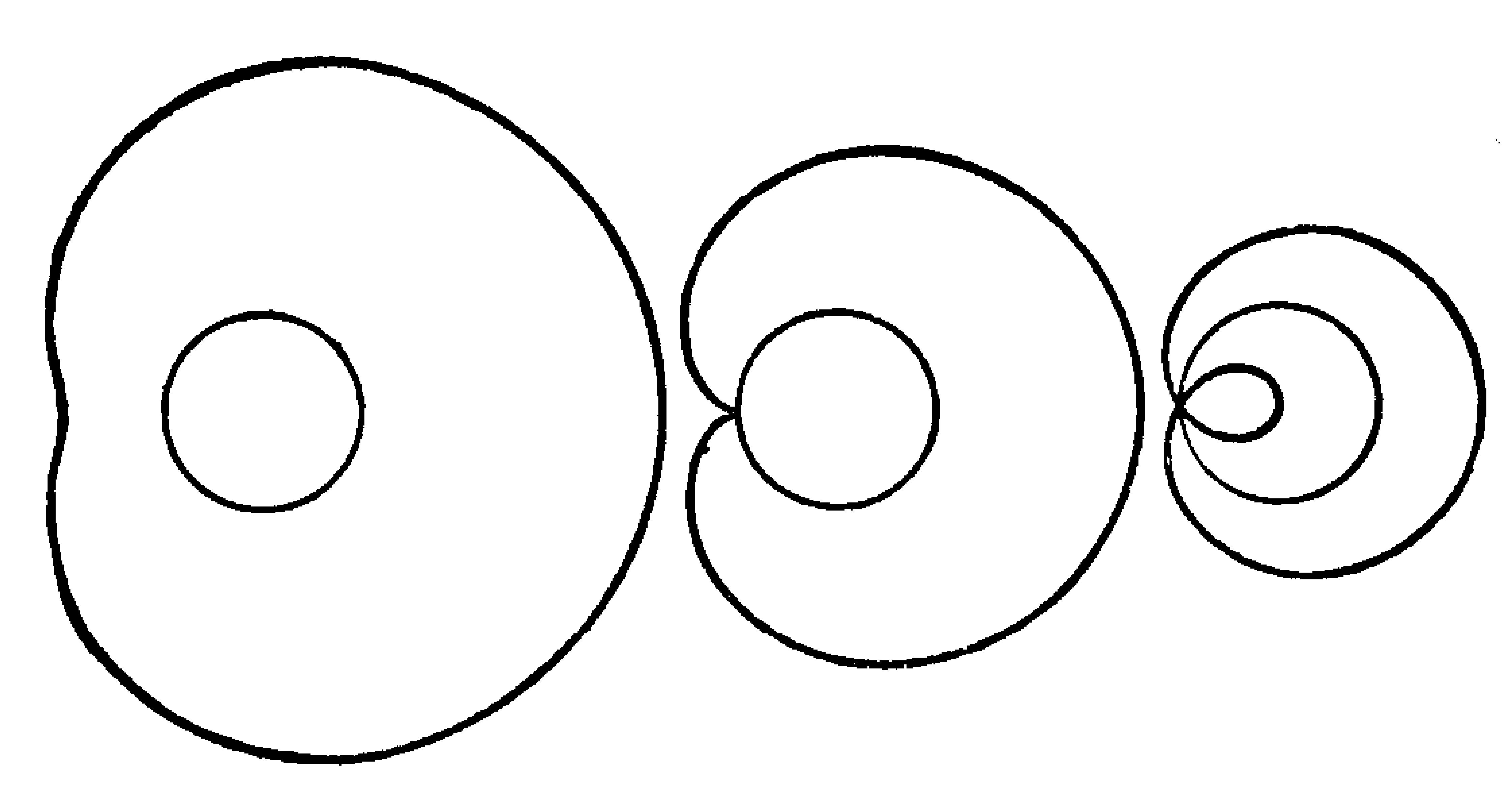


圖 57. 心臟線和"蝸牛線"

我們現在來看圓周關於它本身上的一點的蚌綫。我們不難認出，它是我們的相識：圓關於圓上一點的蚌綫就是心臟綫。要相信这一點，只要看一下圖 53 就行了。

已知曲綫和極，我們能够得到的不是一条蚌綫；只要把所作綫段的長短加以改变，得到的是整个的蚌綫"族"。在圖 56 上，画了（用不同的虛綫画的）直綫 AB 關於極 O 的三条蚌綫。（裏面每一条都是由兩枝組成的！）

要是我們取一个圓，並取它上面的一點作为極，那末只当取綫段等於直徑時，我們才得到心臟綫。在取另外大小的綫段時，蚌綫將是長心臟綫和短心臟綫。这种長或短的心臟綫有時候也叫做巴斯噶蝸牛綫。在圖 57 上，画了一个心臟綫（中間的）和一对"蝸牛綫"。

心臟綫在技術上有許多用处。机器上的偏心輪和偏凸輪都用心臟綫的形式。有時候，在齒輪製圖時也用到它。此外，光学技術上也用到它。

內 擺 綫

如果大圓不動，而內接於大圓的小圓滾動（圖 58），那末小圓圓周上任何一點画出的曲綫，叫做**內擺綫**。如果動圓半徑是定圓半徑的二分之一、三分之一以至 n 分之一，那末得到的內擺綫就具有兩个、三个以至 n 个歧點。讀者，請你自己試試看，作一个具有兩个歧點的內擺綫的圖：你会得到一个非常有意思的結果。請你把这个結果敍述出來，並且加以証明。

圖 59 a, б, в 画的是具有三个、四个和六个歧點的內擺

綫．如果內圓在外圓中滾動時帶有滑動，那就会得到**長內擺綫**和**短內擺綫**，像圖 60 和圖61 上画的．

內擺綫在任一點的法綫，必通过定圓和動圓的公切點；內擺綫在任一點的切綫，必通过从这公切點所作在動圓上的直徑的另一端．

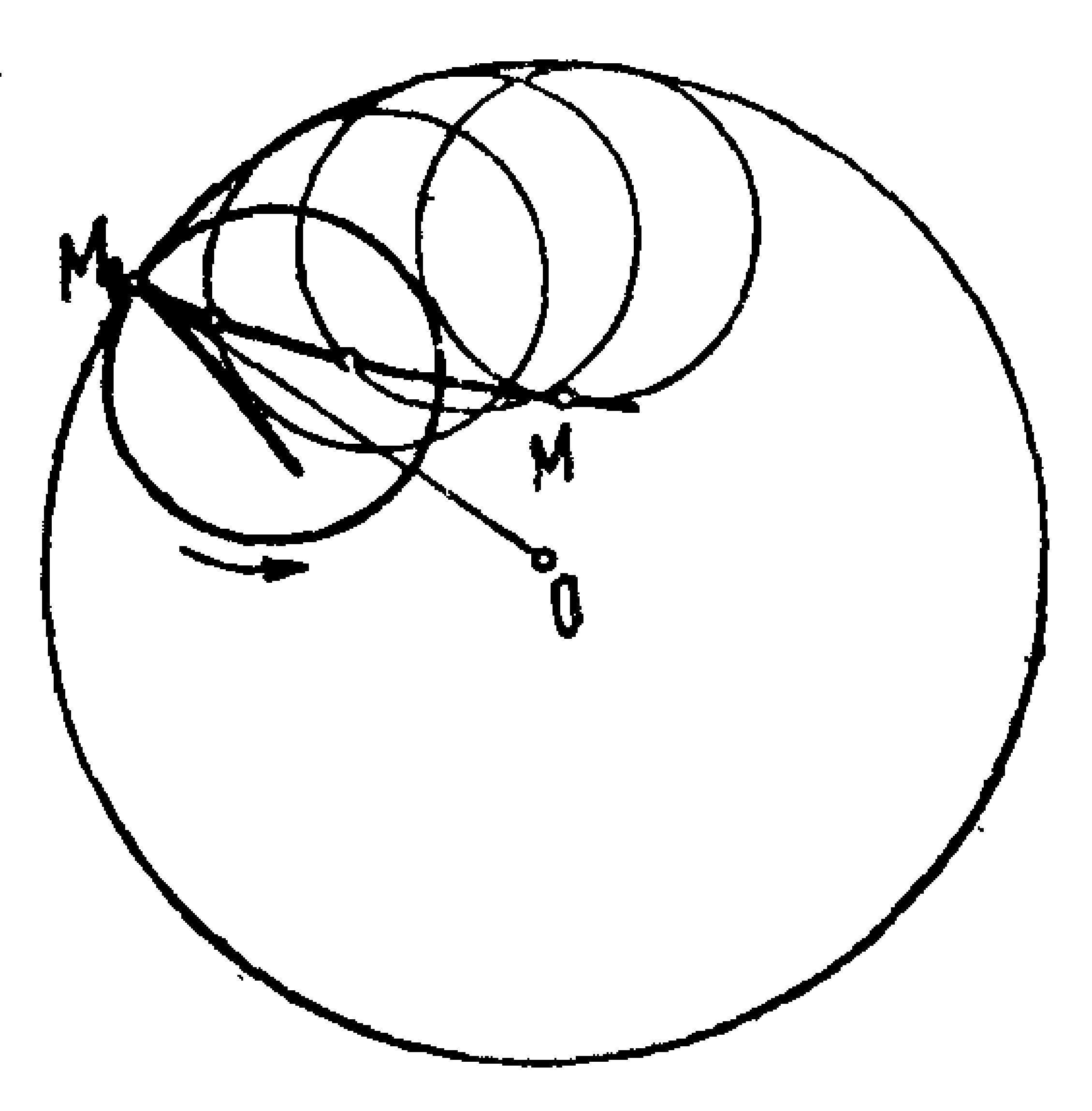


圖 58． 內擺綫

对於具有 n 个歧點的內擺綫，如果動圓的半徑用 a 表示，定圓的半徑用 na 表示，那末內擺綫每一拱弧的長 l_1，內擺綫的全長 l，內擺綫的每一个弧与定圓所夾的面積 S_1，以及內擺綫所包的面積 S，可以用下列的公式來表示：

$$l_1 = \frac{8(n-1)}{n}a,$$

$$l = 8(n-1)a$$

$$S_1 = \frac{3n-2}{n}\pi a^2$$

$$S = (n-1)(n-2)\pi a^2;$$

这些公式和外擺綫的相应的公式(第 49-50 頁)很相像．

我們从所有的內擺綫裏挑出可注意的一个——有四个尖點的——來研究一下(圖 59б)．它又叫**星形綫**，因为形狀像星．通常關於星形綫的公式不用動圓的半徑 a 來表示，而用定圓的半徑 R 來表示．在方才寫出的公式裏，使 $n=4$，把 a 換成相等的量 $\frac{R}{4}$，就得到星形綫的公式：

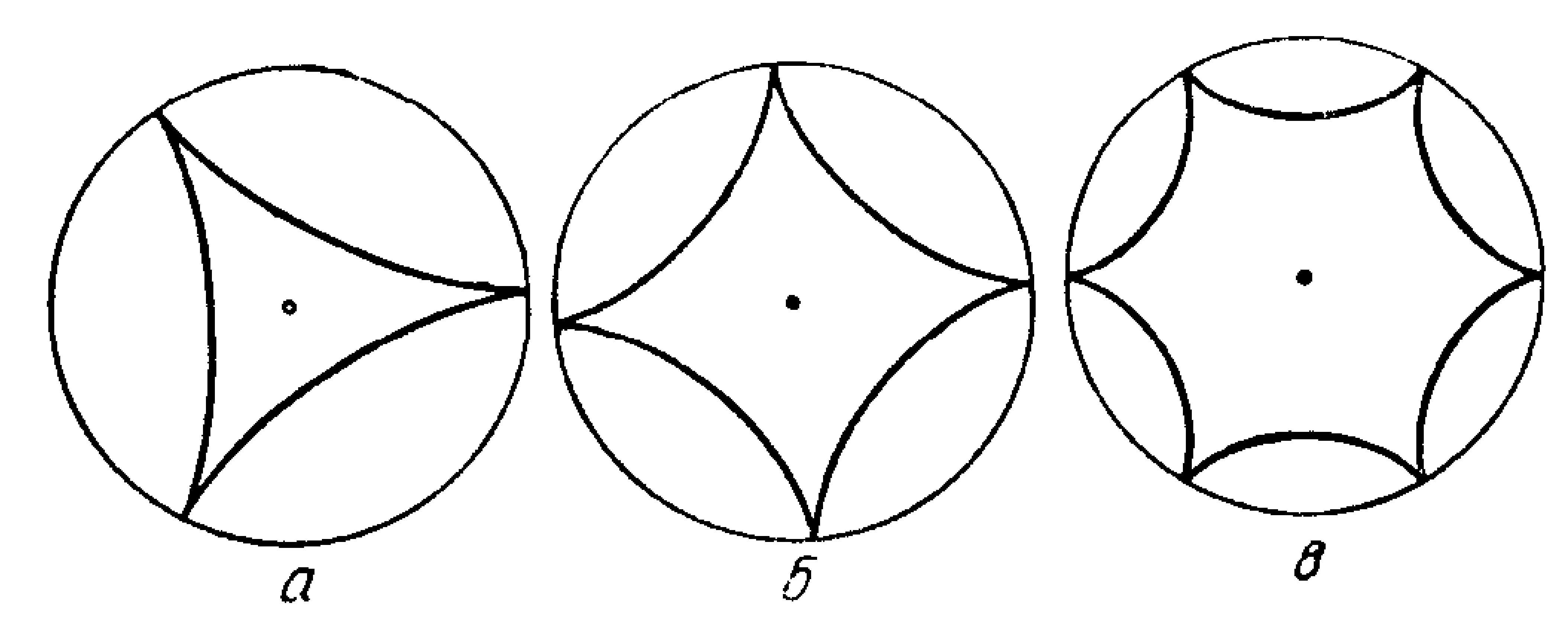


圖 59. 各种內擺綫

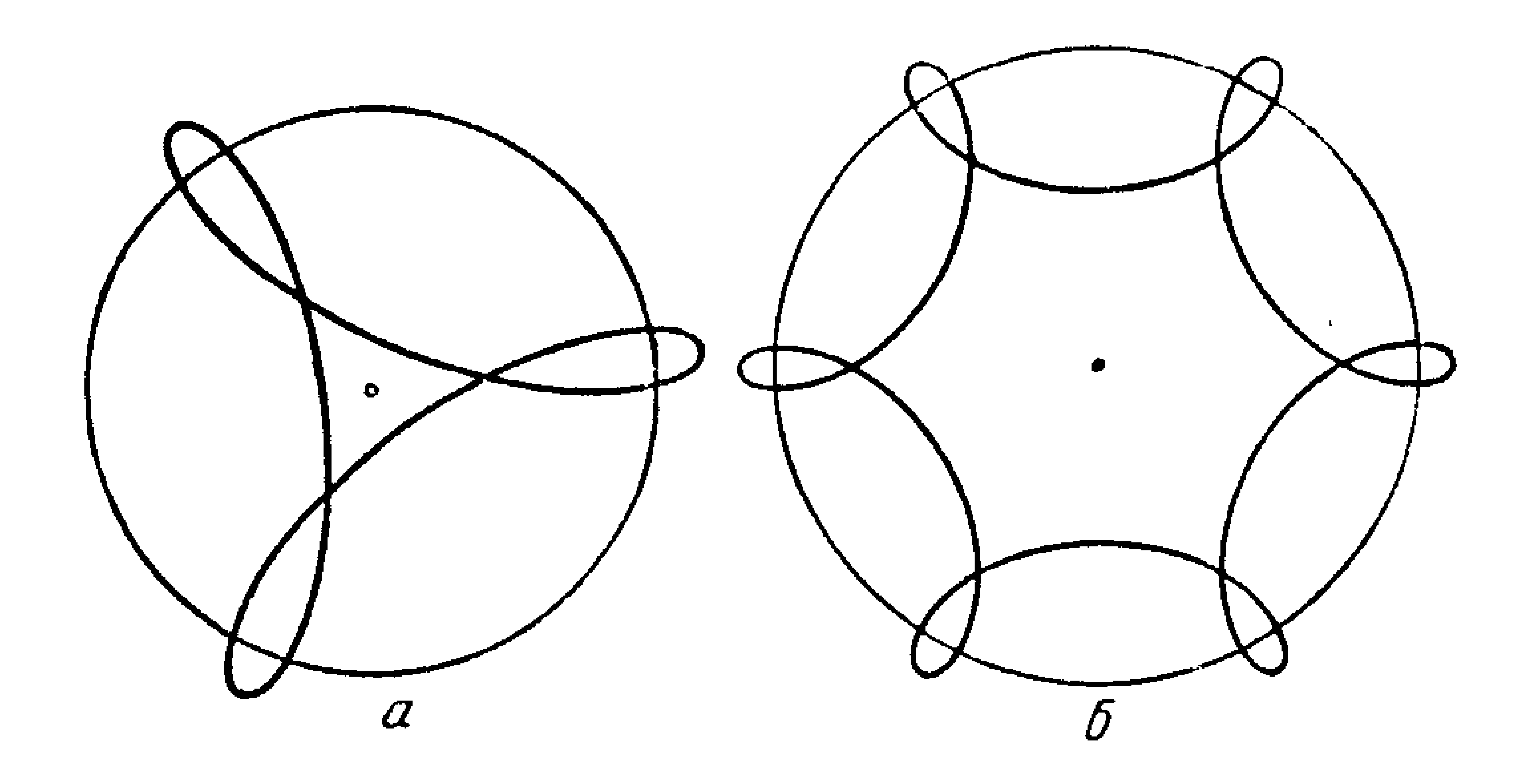


圖 60. 長內擺綫

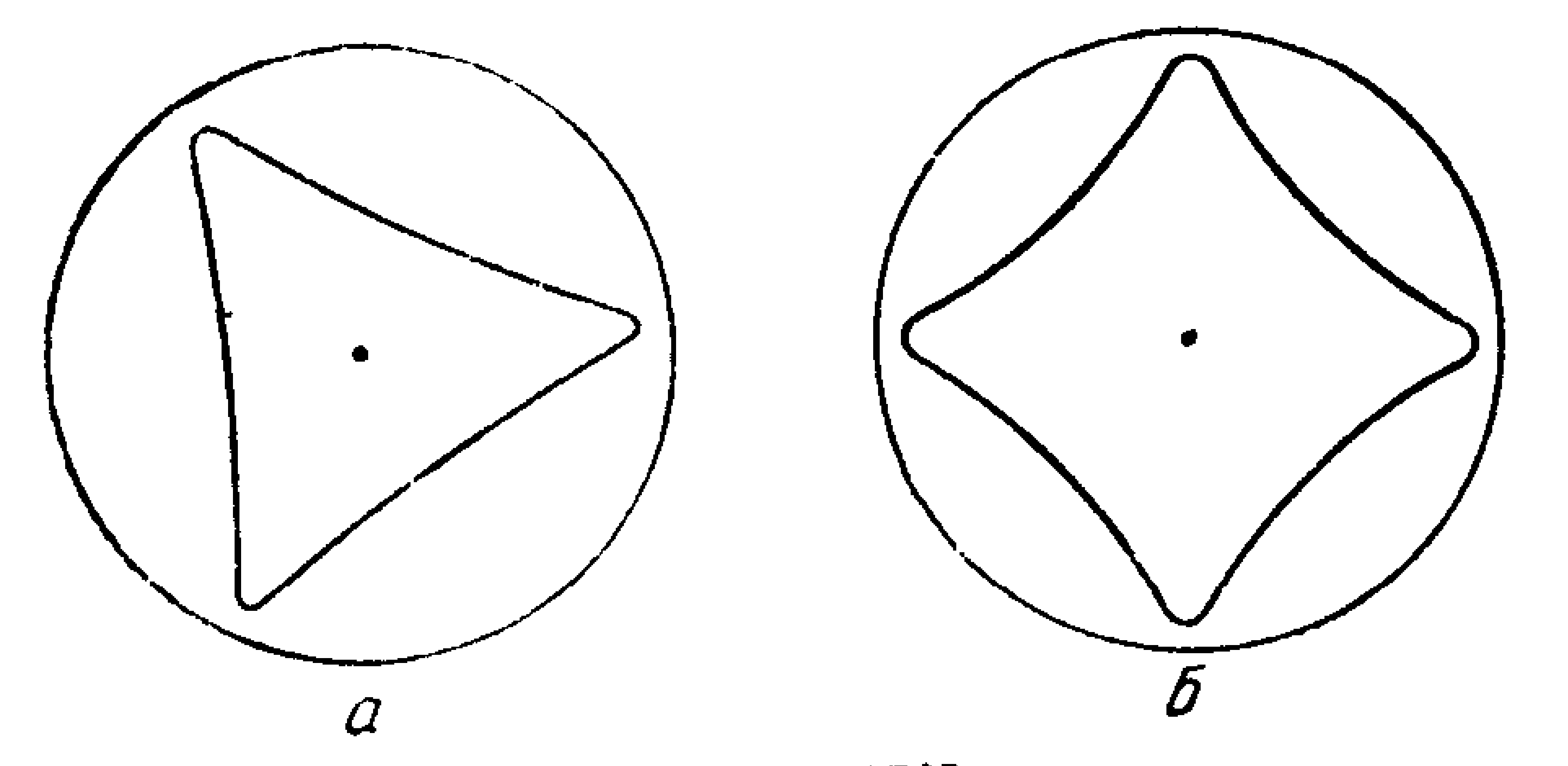


圖 61. 短內擺綫

$$l_1=\frac{3}{2}R, \qquad l=6R;$$

$$S_1=\frac{5}{32}\pi R^2, \qquad S=\frac{3}{8}\pi R^2.$$

因此，星形綫的全長等於動圓半徑的六倍，它所圍的面積等於動圓面積的八分之三。

我們來考慮星形綫在 M 點的切綫 AB（圖 62）。像一切內擺綫一样，切綫 AB 必通过 T 點，T 點是動圓上从定圓和動圓的公切點 K 所作直徑的另一端。如果角 O_1OM_0 用 φ 表示，那末角 MO_1K 等於 4φ（为什麼？）。等腰三角形 TO_1M 兩底角的和等於頂角的外角 4φ，因此每一个底角等於 2φ。三角形 OTB 內，OB 底的兩底角的和等於 2φ（根据同一个關於三角形外角的定理）；但是角 TOB 等於 φ（我們最初就是这样表示的），那末角 TBO 也等於 φ；三角形 OTB 是等腰三角形，$OT=BT$。同样的，可以証明 $TA=OT=TB$。

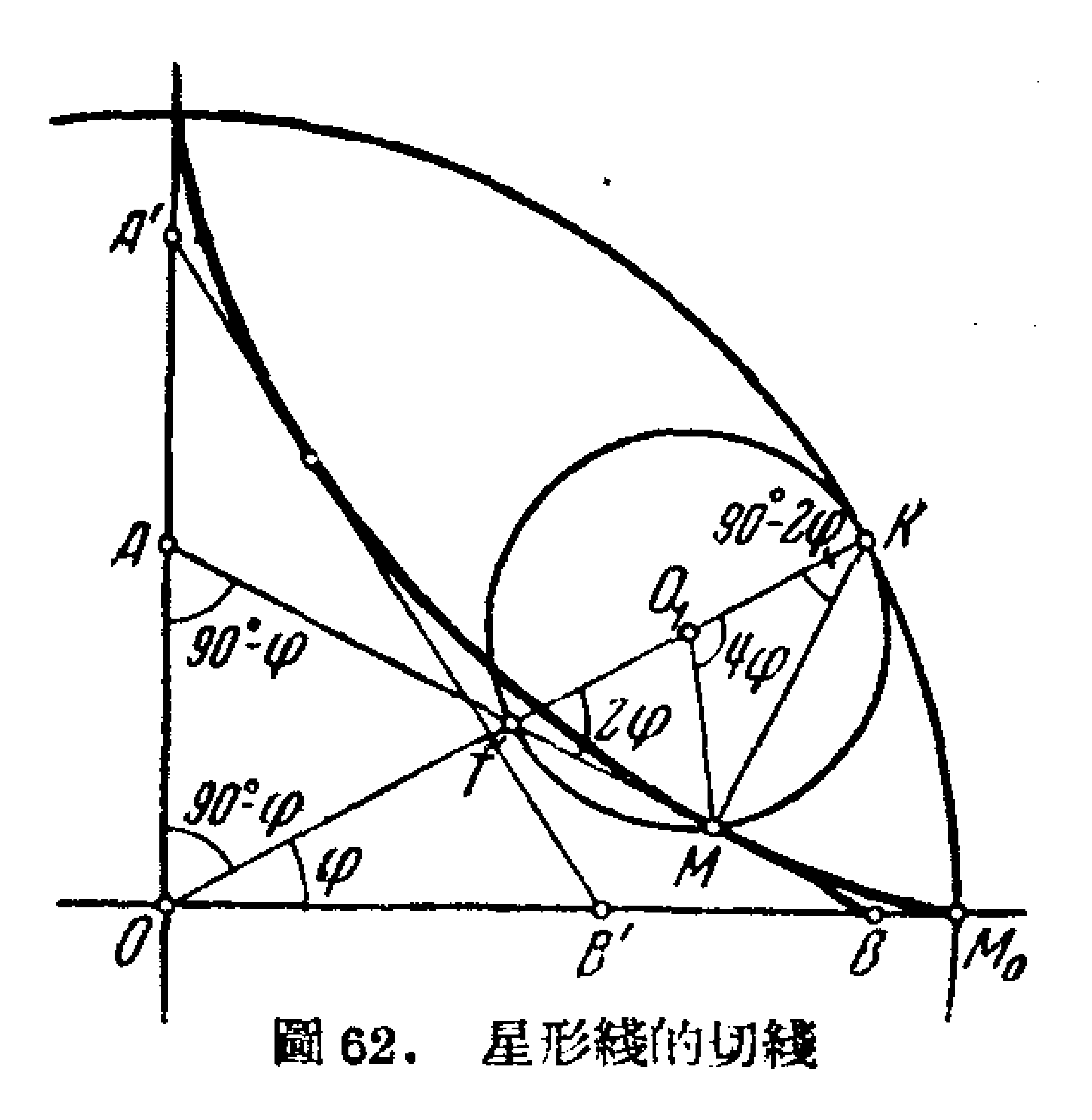


圖 62. 星形綫的切綫

但是 OT 是定圓半徑和動圓直徑的差，等於定圓半徑的二分之一，就是 $\frac{R}{2}$。因此，星形綫切綫夾在定圓互相正交且通过歧點的兩条半徑中間的一段，長等於定圓半徑，跟 M 點的选擇無關。

这一个事实，使我們可以按照下面的方法來進行星綫的

作圖．画兩条互相垂直的直綫；再画一些長 R 的綫段，使它們的兩端恰好在这兩条互相垂直的直綫上．在圖 63 上，画了 12 条这样的綫段（包括互相垂直的兩条直綫本身上的兩段）．这种綫段画得越多，得的曲綫就越精確．然後再隨手画出这些綫段的包絡（在圖 20 上就已經碰到过包絡了）．这个包絡就是星形綫．

在圖 64 上画的是星形綫旋轉体，將星形綫繞着通过一条直徑兩端點的直綫旋轉，就得到星形綫旋轉面，它所圍的体積就是星形綫旋轉体．星形綫旋轉体的体積等於 $\frac{32}{105}\pi R^3$，旋轉面的面積等於 $\frac{12}{5}\pi R^2$．

現在回到在第 58 頁，開始講到內擺綫時我們曾經建議讀者自己做做看的問題，就是關於 $n=2$ 的情形 —— 具有兩个歧點的內擺綫．設動圓的圓心在某个位置 O_1（圖 65）．確定內擺綫上相應的點，只要作角 KO_1M 等於角 O_1OM 的兩倍．但是動圓無論在什麼時候都通过定圓的中心．角 $KOM=\alpha$ 是

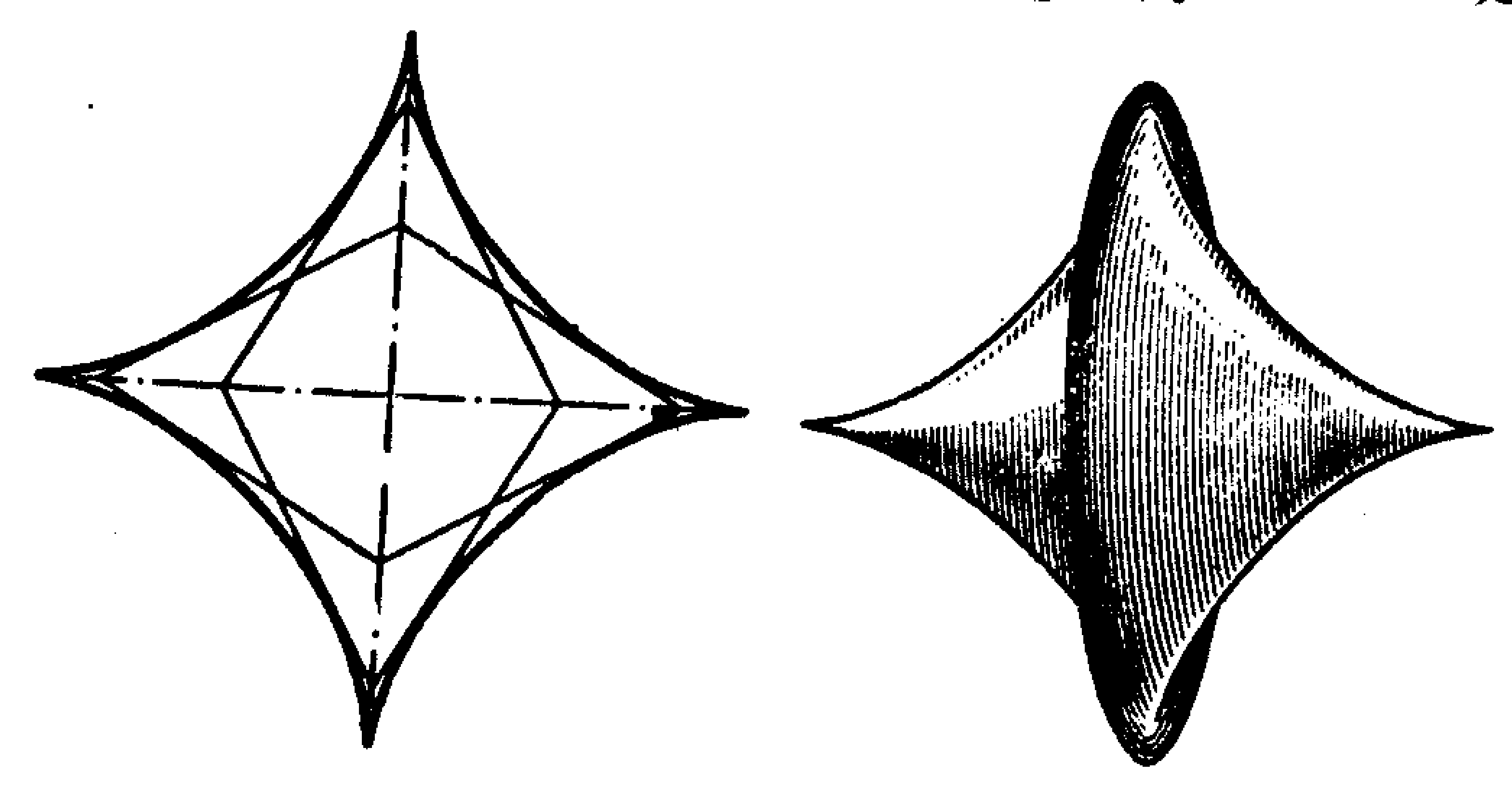


圖 63． 星形綫是它自己的所有切綫的包絡

圖 64． 星形綫旋轉体

動圓的圓周角，而角 KO_1M 等於 2α，就是動圓圓周角的兩倍，也就是動圓的圓心角。因此，點 M 必然在綫段 OM_0 上。不論 O_1 在什麼位置情况都是这样，於是我們得到了下面有趣的結果：設有一圓內接於另一半徑兩倍大的定圓而無滑動地滚動，那末動圓圓周上的點就在定圓的直徑上运動。哥白尼就已經發現这条定理了。

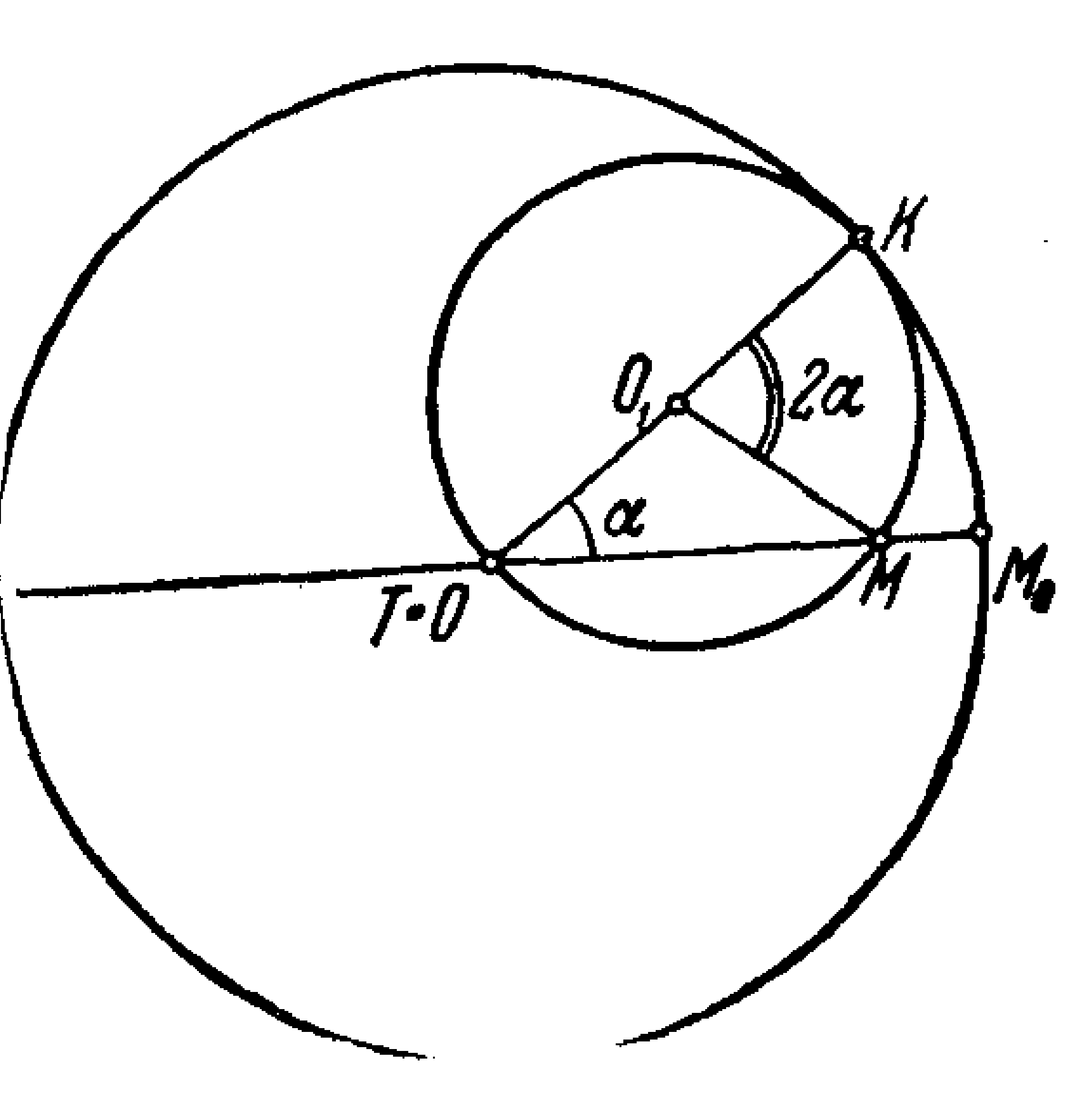


圖 65. 哥白尼定理

在这种情形，我們說，內擺綫"退縮"成了一条重複兩次的直綫段(點 M 从直徑的一端到另一端，來回兩次)。如果在第 59 頁的公式裏使 $n=2$，那末面積 S 等於 0，整个"曲綫"的長等於 $8a$，就是等於母圓直徑的兩倍再重複一次。这正是我們要求出的結果。

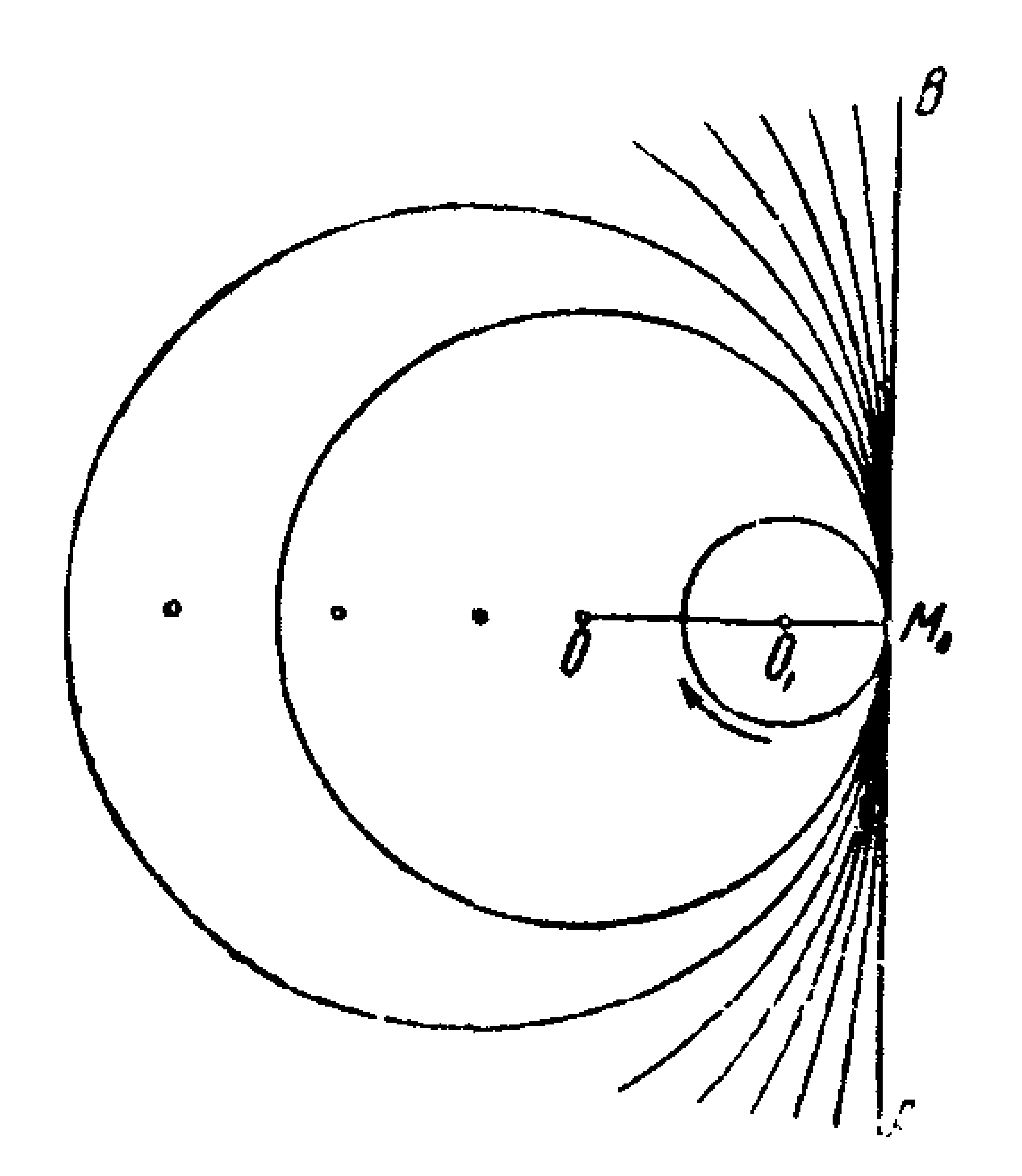


圖 66. 定圓半徑的無限增大

現在使動圓的半徑 a 保持不变，而使定圓的半徑 na 無限增大。換句話說，就是使 n 取一連串逐漸增大的值：$n=3, n=4, n=5$ 等等，直到無窮。这样，定圓就"越拉越直"，最後趨近的極限位置是圖 66 上的直綫 AB。內擺

綫也將逐漸"伸展",最後達到極限位置時是普通的擺綫. 看一看關於內擺綫每一个拱弧弧長的公式以及相应的面積公式將变成什麼形式. 內擺綫一个拱弧的弧長是:

$$l_1 = \frac{8(n-1)}{n}a = 8a\frac{n-1}{n} = 8a(1-\frac{1}{n}).$$

当 n 無限增大時,等式右方括弧內的因子趨近於 1,因为 $\frac{1}{n}$ 趨近於零. 因此,拱弧的長度趨近於 $8a$,正是普通擺綫每一个拱弧的長度.

關於面積,我們有公式:

$$S_1 = \frac{3n-2}{n}\pi a^2 = \pi a^2(3-\frac{2}{n}).$$

当 n 無限增大時,右方趨近於 $3\pi a^2$,正是普通擺綫每一个拱弧和它的底綫所圍的面積.

請讀者对外擺綫作同样的研究.

具有無窮多个拱弧的外擺綫

到現在为止,我們只考慮过定圓半徑比動圓半徑大整數倍的情形. 但是也可以使定圓半徑是動圓半徑的 $1\frac{1}{2}$ 倍或 $3\frac{1}{2}$ 倍. 在外擺綫的情形,还可以使大圓在小圓上滚動. 換句話說,定圓半徑和動圓半徑的比可以是一个分數:对於內擺綫,这个比是假分數;对於外擺綫,却可以是假分數,也可以是眞分數.

圖 67 上画的外擺綫,它的定圓半徑是動圓半徑的一倍半,就是 $n=\frac{3}{2}$. 不难理解,動圓轉一周相当於定圓上的 120° 弧. 點 M 画了三个环扣以後,再回到 M_0 點. 無論这条曲綫

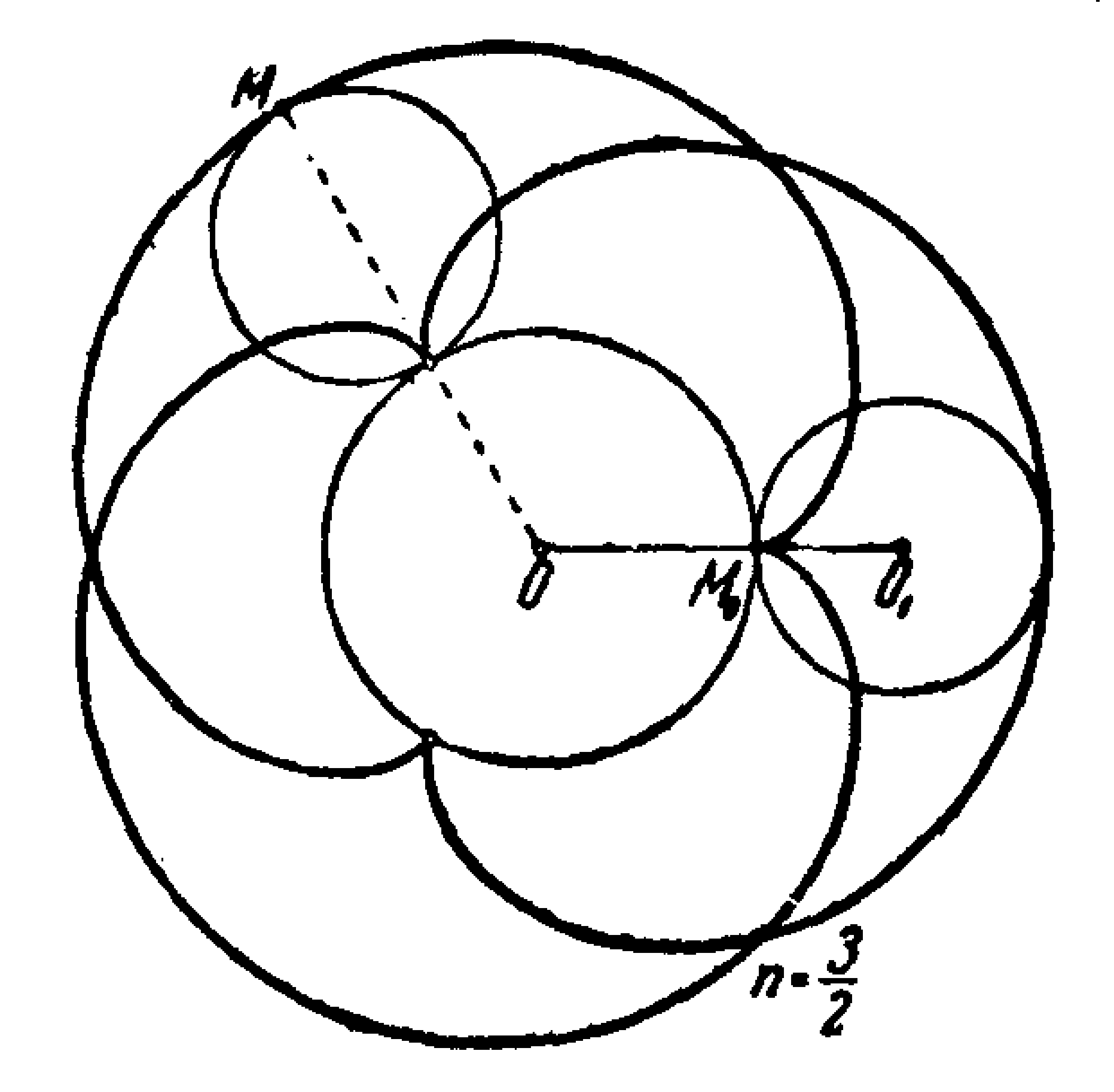


圖 67. 自交外擺綫

的形狀多麼不普通，多麼"紊乱"，它終究还是外擺綫：因为在它每一點的法綫必定通过動圓和定圓的公切點，它每个拱弧的長和每个拱弧和定圓所圍的面積都可以按第 49-50 頁所列的公式來計算（取 $n=\frac{3}{2}$）；只是關於整个曲綫所包的面積，这時候失掉了意义：因为各个拱弧彼此之間有相交的情形發生。

在圖 68 а，б，в，г，画了幾个具有不同分數值 n 的外擺綫和內擺綫。

考慮这幾个圖，不難得出下列的結論。如果外擺綫定圓半徑和動圓半徑的比 $R:a$ 等於某既約分數 $\frac{p}{q}$，那末動圓需要滾 p（就是 $\frac{p}{q}\times q$）轉以後，M 點才回到 M_0 點的位置。因此，曲綫是閉曲綫。它具有 p 个歧點和 $p(q-1)$ 个自交點。在圖 69 上画的外擺綫，$p:q$ 等於 5:3（就是說，$n=\frac{p}{q}=\frac{5}{3}$）。它有 $5(3-1)=10$ 个自交點，5 个歧點。同理，在圖 70 所画 $p:q=2:3$ 的外擺綫，有 2 个歧點，$2(3-1)=4$ 个自交點。最後，在圖 67 上画的外擺綫有三个歧點和三个自交點，正像由普遍的公式算出來的一样。注意，所有这些外擺綫都內接於和定圓同心的一个圓，这个圓的半徑等於定圓半徑和動圓直徑的和。这些曲綫整个都在由兩个同心圓所形成的圓环裏面。

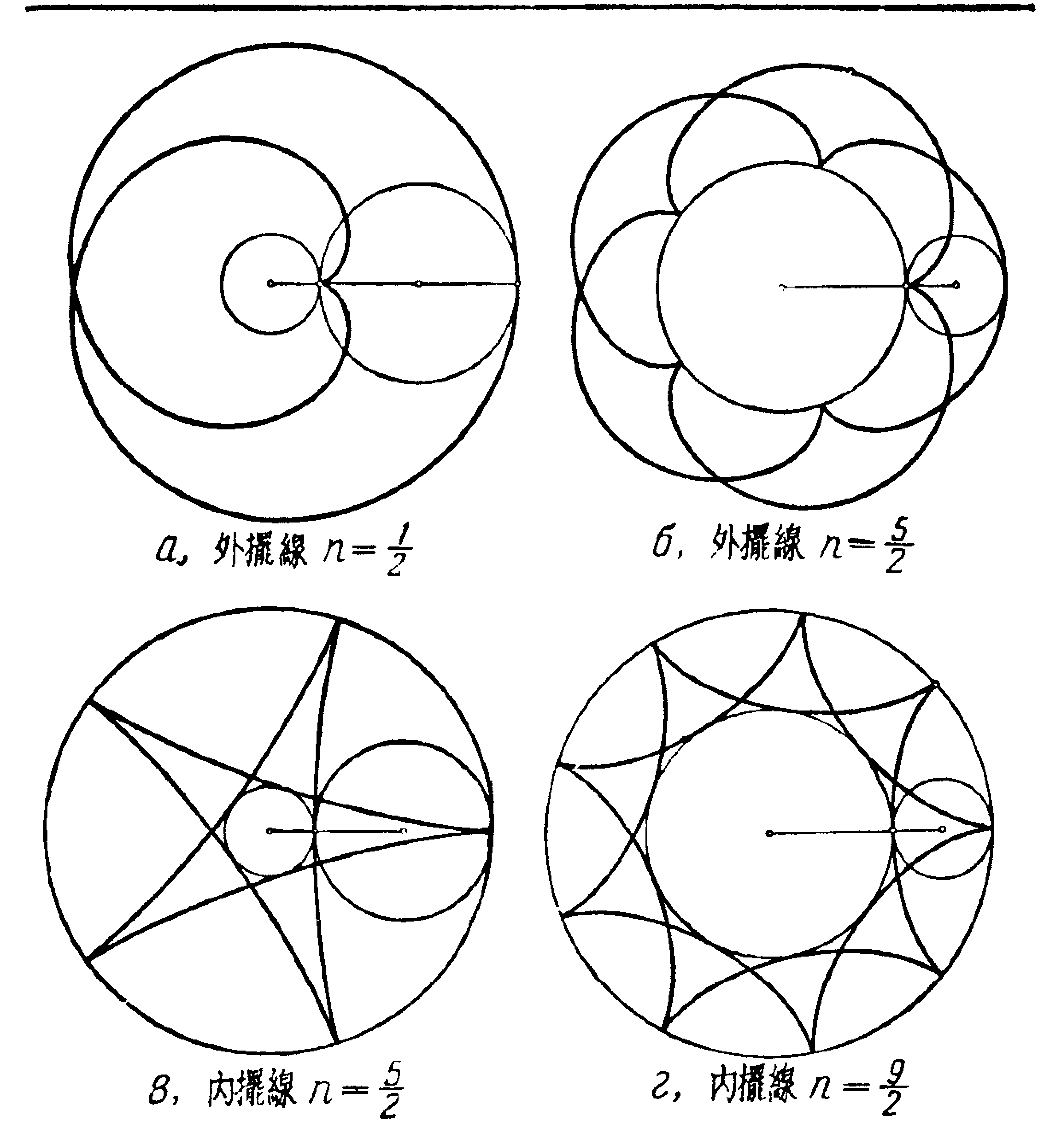


圖 68. n 为分數值時的外擺綫和内擺綫

現在再看一个比較有趣的情形——動圓半徑和定圓半徑的比是無理數的外擺綫. 圖 71 上画的定圓,它的半徑等於以動圓半徑为边的正方形的对角綫. 換句話說,比例 $R:a=\sqrt{2}$ 是一个無理數. 定圓半徑和動圓半徑是不可通約的,不管用多麼小的綫段作量長度的單位,它們的乘積不可能表示成一个整數. 因此,由这兩个圓所作出的外擺綫永远不会閉

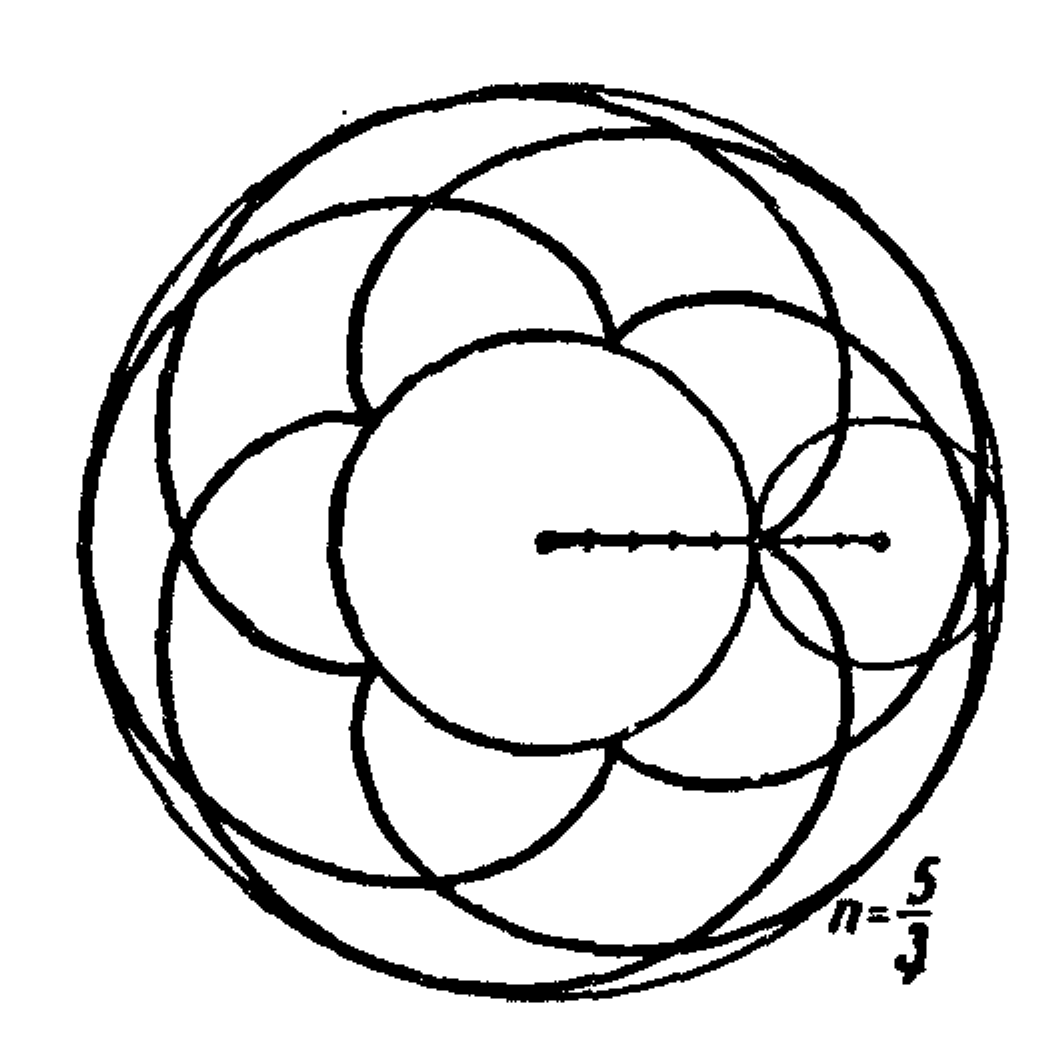


圖 69. $n=\frac{5}{3}$時的外擺綫

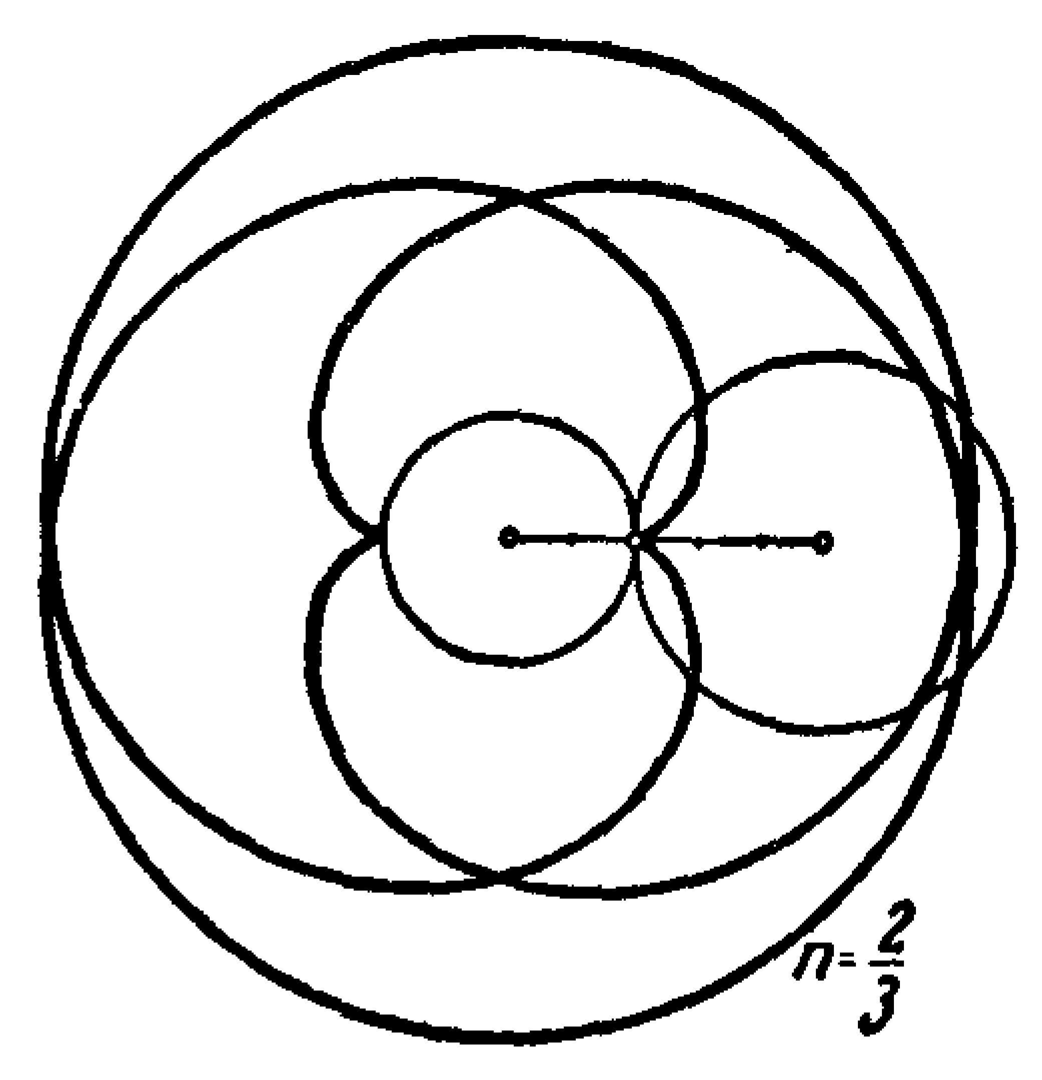


圖 70. $n=\frac{2}{3}$時的外擺綫

合起來，永远在不停地打环扣。它有無窮多个歧點和自交點。当然，圖 71 上画的只是这个有趣的曲綫的一部分。

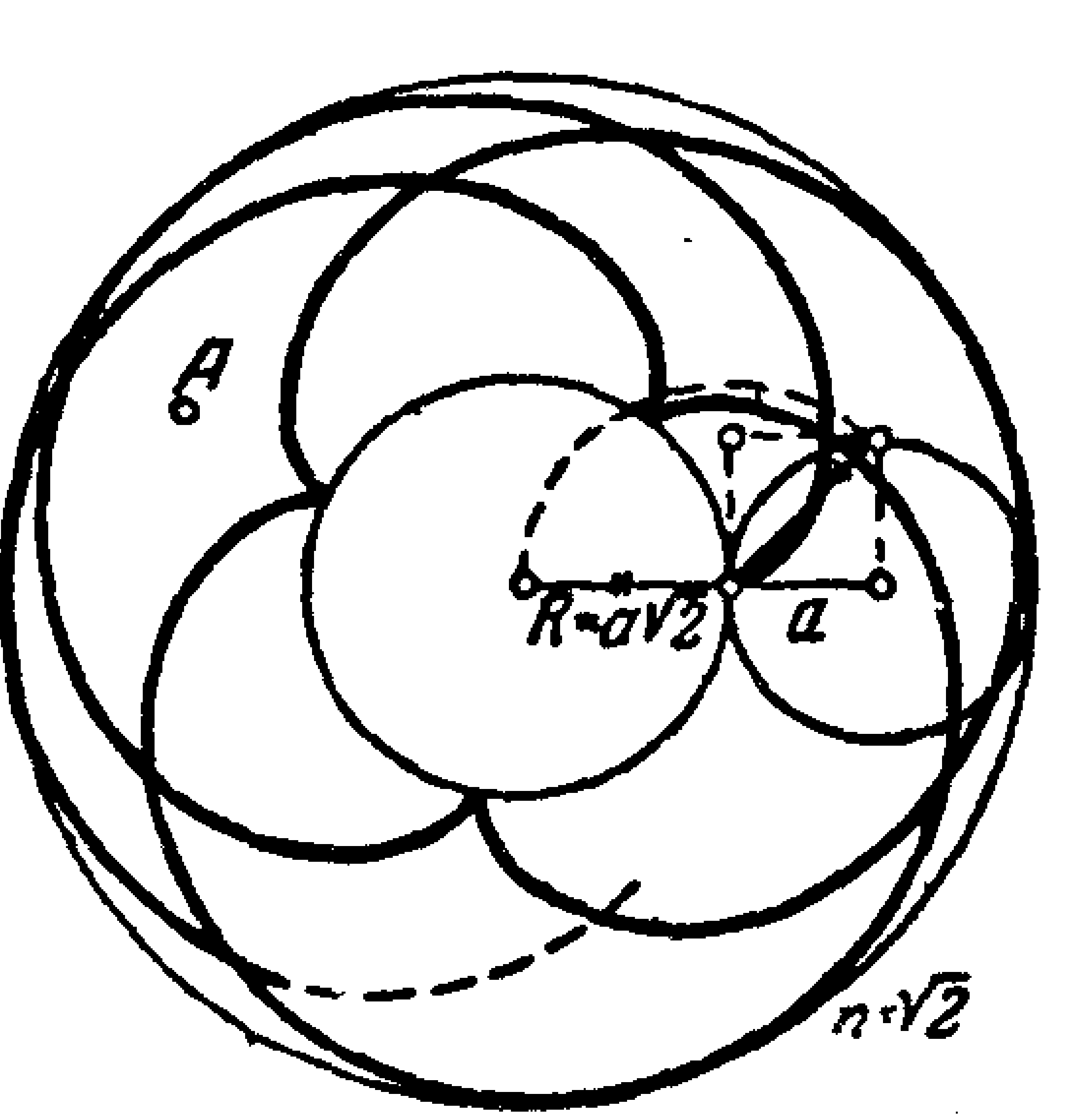


圖 71. 動圓半徑和定圓半徑的比是無理數時的外擺綫

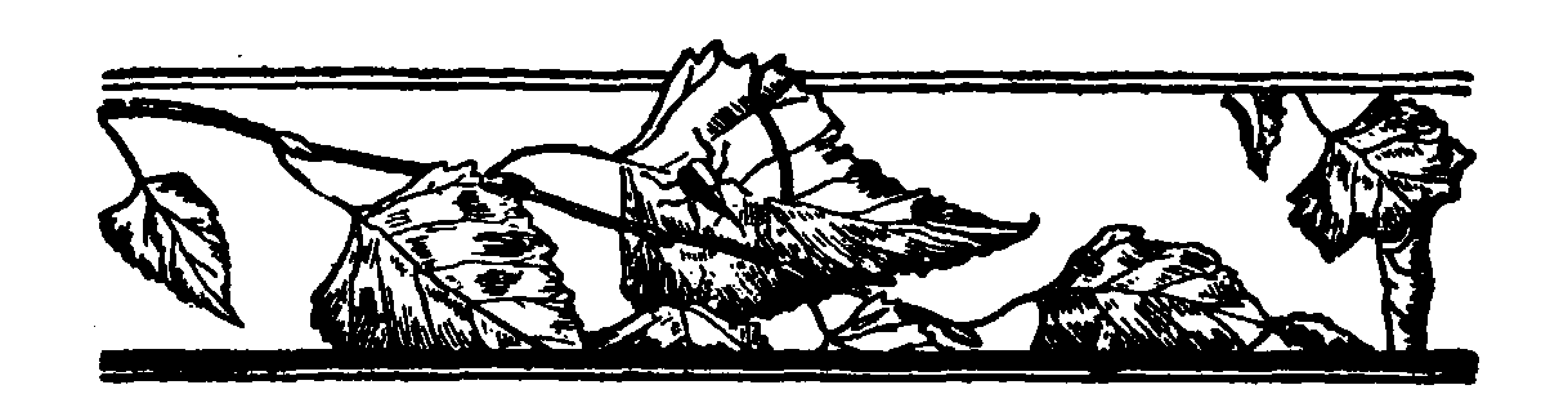
不但这样，我們这条曲綫將画出無窮無尽多的环扣，越來越密地塡在由兩个同心圓所圍的环帶形區域內。曲綫上的點是不是把整个环帶都塡滿了呢？是不是在曲綫的环扣裏面还有空白點呢？換句話說，是不是可以断言，曲綫的环扣是充分多，多到对於隨意选擇的一點，比如說 A 點，都有一个环扣通过呢？大概你很想給这个問題一个肯定的答案。但是这却距离事实很远。在环帶形區域裏有許多的點（这种點有無窮多！）不在我們的曲綫上：这些點都是

紙上的空白點！有趣的地方也正在这裏。任意取环帶裏的一點，我們的曲綫必定可以任意地接近它。假使我們在环帶形區域裏指定一點 A，並且选定任何一个非常小的綫段，例如等於 $0.001a$，那末我們的曲綫当画了足够多的环扣以後，一定經过和 A 點相距小於这个綫段的某些點。比如預先給定的距离是 $0.000001a$，甚至是 $0.000000001a$，曲綫或早或遲一定經过和 A 點相距小於这些綫段的某些點。这种概念可以用簡單的話來表示，我們說，曲綫上的點在环帶形區域內是**处处稠密的**。得到的結果看起來好像是自相矛盾的：一方面，在环帶形區域內有無窮多的點是曲綫不通过的；另一方面，曲綫上的點又在环帶中是处处稠密的！

要想"揭穿"这个謎，必需用到無窮性这个概念——就是我們曾經在講亞里士多德的詭辯時提起过的（第 12 頁）。但是在这本書裏却不能多講㊀。我們僅僅指出，有一种曲綫可以毫無例外地通过某一个由閉曲綫所圍的區域裏所有的點——例如，通过某正方形內所有的點。从直观上看，好像这是不可能的，但是近代數学却完全能够証明这种曲綫的存在，並且可以研究它的性質。

我們逐漸离開主題了，現在再回到它上面來——摒棄抽象的推理而用簡單的圖，看一看圖往往比嚴格的証明得到更多的东西。古代的印度數学家常常在他們的幾何著作裏用一目了然的圖例來代替証明，在圖旁寫着："請看！"

㊀ 这些問題在數学上所謂"集合論"的那一部分裏講到。



第 四 章
漸屈綫和漸伸綫

自然界裹耐人尋思的東西太多了!

克雷洛夫

漸 伸 綫

我們已經講过(在第 37-39 頁上)英國学者連氏怎样計算了擺綫拱弧的長度。要把連氏"提示性的推理"加以嚴格証明,需要花很多力气㊀.在这裏,直達的途徑太陡了,所以还是取一条比較長些但是"平坦"些的路來得方便,而且能够比較快地達到目的。这条迂迴的道路牽涉到一种特殊的曲綫——按它的性質來說,也是一种伴隨曲綫;每一个平滑的曲綫(包括擺綫在內),都具有这样一条伴隨曲綫。这条"伴隨曲綫"叫做原來曲綫的漸伸綫。

讓我們來看一下曲綫的凸弧 AB(圖 72)。我們設想把一根不能伸縮的、和 AB 弧等長的絲綫,一端固定在 AB 弧上

㊀ 証明这一類定理的方法屬於"積分学"。

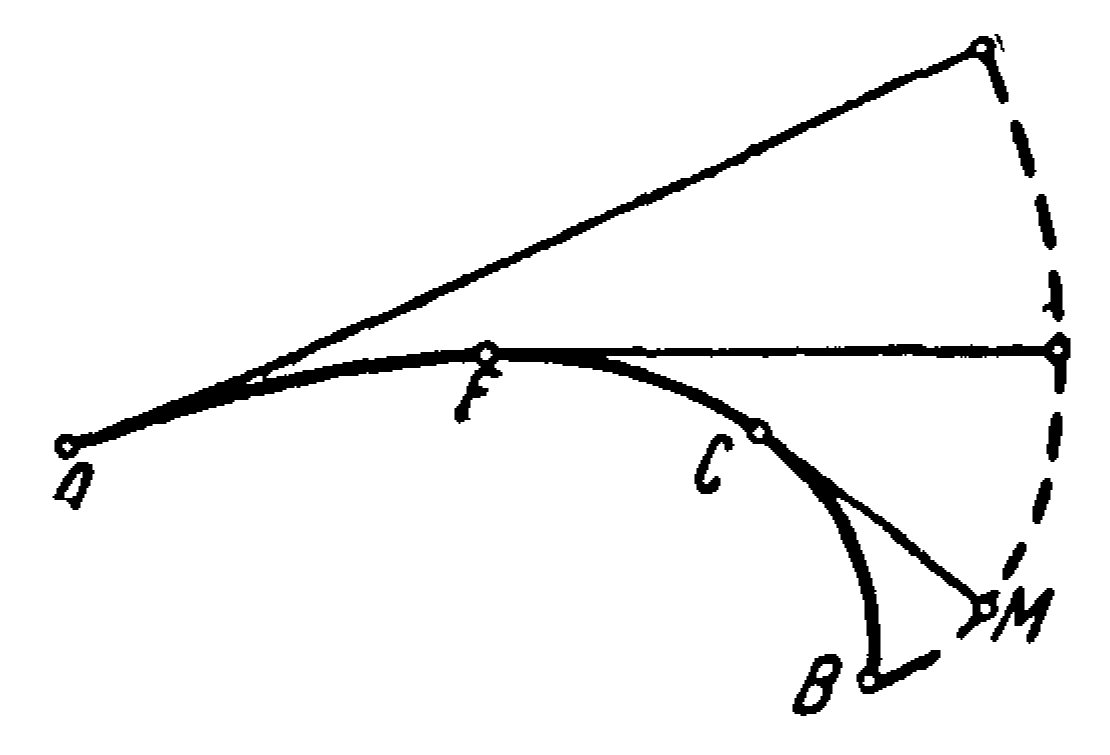


圖 72. 曲綫的漸伸綫

的 A 點，並且使絲綫緊緊地貼合在弧上，它的另一端正好落在 B 點上。

把絲綫"伸展開"——拉直，並把它拉緊，使得絲綫的自由部分 CM 的方向永远是合於 AB 弧的切綫方向。这時候，絲綫的端點就画出了一条曲綫。这条曲綫就叫做原來曲綫的漸伸綫。

可以用洋鉄片或粗鉄絲來製成原曲綫的形狀，把它緊貼在紙上，而在絲綫的一端拴一枝鉛筆；这時候鉛筆就会自動劃出漸伸綫。只需留意到時時刻刻把拴着鉛筆的絲綫拉緊。

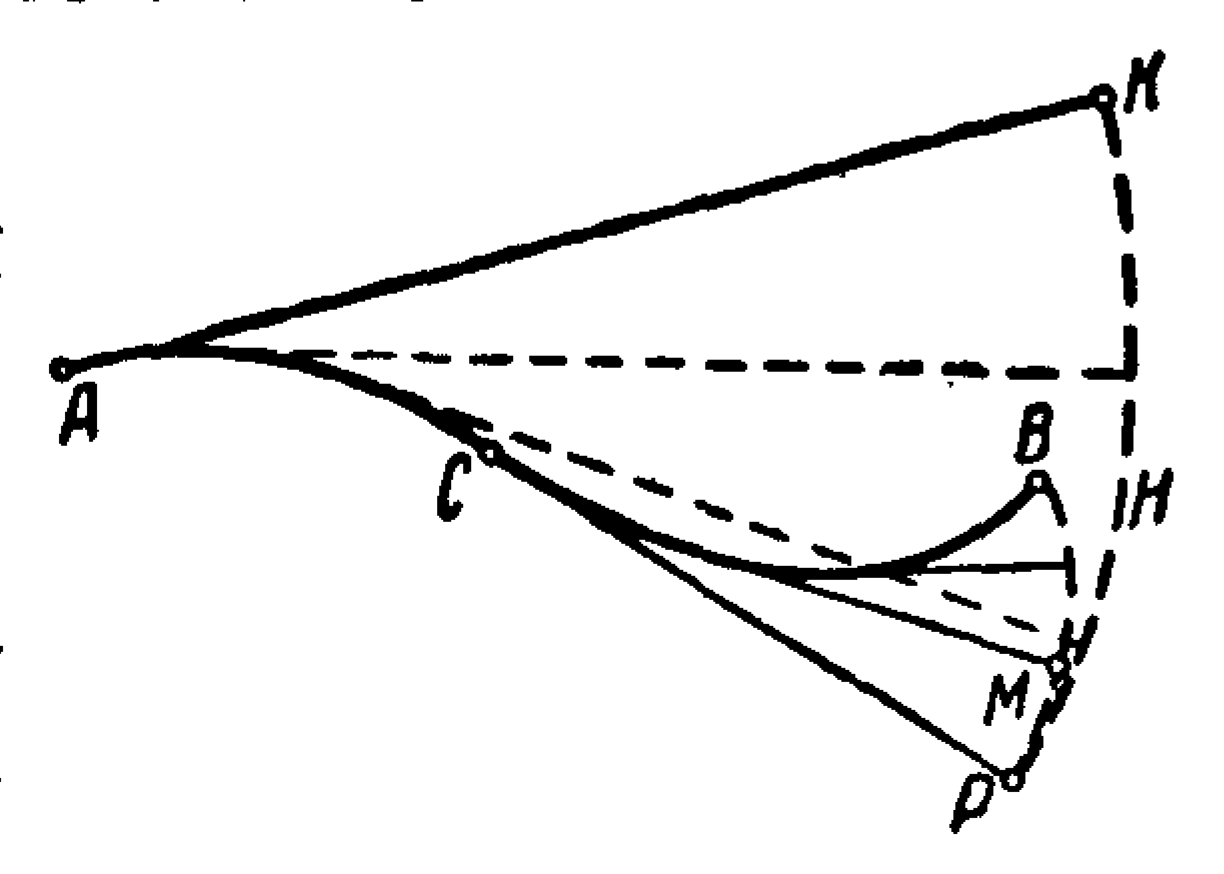


圖 73. 曲綫的变曲點和漸伸綫的歧點

如果曲綫弧並不是全向一边凸的，如果它像圖 73 的弧 AB，在 C 點的切綫由曲綫的一边穿到另一边來了（这种點叫做**变曲點**），这時候我們仍然可以講曲綫的漸伸綫，不过要考慮得更多一些。

使絲綫恰好固定在变曲點 C（圖 73）。在 BC 弧上的絲綫段伸展開時劃出曲綫 BMP——漸伸綫。

現在再看貼在原曲綫 AC 弧上的絲綫段，不过这時候它已經延長了：在 C 點，这条絲綫段和絲綫段 CP 接起來了。把延長了的絲綫 ACP 从曲綫 CA 伸展開，我們就得到曲綫弧

PHK，这弧和弧 *BMP* 共同組成一个連續曲綫——**連續的，但並不是到处平滑的**：因为原曲綫的变曲點 *C* 所对应的點是曲綫 *BMPHK* 的歧點；曲綫 *BMPHK* 就叫做曲綫 *BCA* 的**漸伸綫**。

漸伸綫的基本性質

画某一曲綫的漸伸綫時，应該時時刻刻把絲綫拉緊。由於这个緣故，絲綫段 *CM* 的方向總是和曲綫在 *C* 點的切綫方向一致的（圖 74）。当絲綫移動時，拴在它一端的鉛筆尖端就好像画出以 *C* 为圓心、*CM* 为半徑的圓上的一小段弧。当然，如果絲綫伸展開得略微大了一些，點 *M* 变到了點 *K*，那麼鉛筆尖端就会在另外一个圓上运動——就是在一个以 *E* 为圓心的圓上运動。漸伸綫可以用一些圓來表示，这些圓的半徑隨時在变動，圓心却在曲綫 *AB* 上滑動。但是在每一瞬間，切點都可以看作是某一無窮小的圓弧的圓心，这个無窮小的圓弧和漸伸綫上的一个無窮小的圓弧相吻合。點 *C* 因此也叫做**瞬時圓心**，或**漸伸綫的曲率圓心**。因此，任何曲綫都是它的漸伸綫的曲率圓心的軌跡。

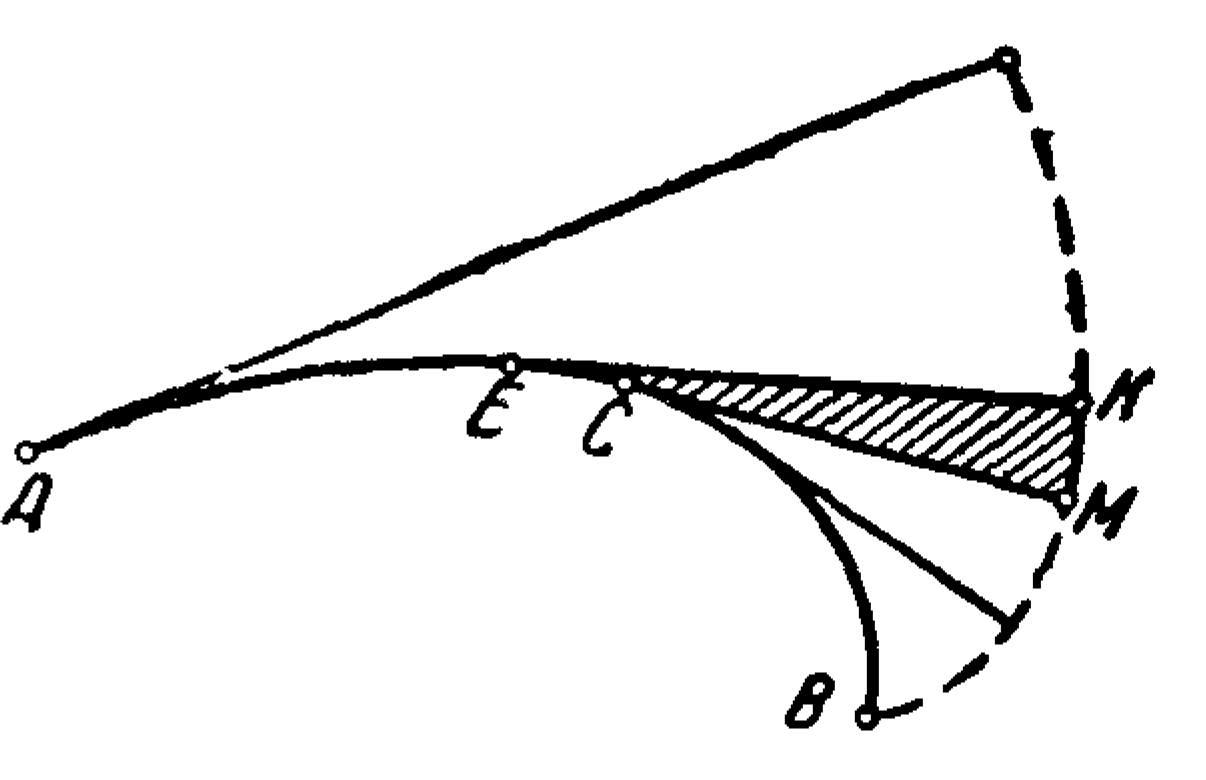


圖 74. 漸伸綫的基本性質

因为漸伸綫 *MK* 的無窮小的弧和用 *C* 作圓心、*CM* 作半徑的無窮小的圓弧"匯合"，所以漸伸綫在 *M* 點的切綫一定垂

直於瞬時半徑 CM. 这样就得到了重要的結果：漸伸綫的方向（就是它的切綫的方向）必垂直於原來曲綫的切綫. 从这裏就得到：漸伸綫的法綫是原來曲綫的切綫.

我們也可以說：漸伸綫和原曲綫直交. 这是漸伸綫的一个非常重要的性質，所以要在这上面多停留一下. 在圖 75 上，画了曲綫 AB（用实綫繪出）以及它的一些切綫（在各不同的點）. 在这个圖上可以看出，得到的並非一条而是無窮多条和这些切綫直交的曲綫（用虛綫繪出）. 这些曲綫裏的每一条都是曲綫 AB 的漸伸綫. 事实上，如果使絲綫貼緊在曲綫 AB 上，再使絲綫在 A 點固定，在 B 點拴上一枝鉛筆，那末把絲綫伸展開時，鉛筆就画出一条曲綫. 但是鉛筆可以拴在絲綫段的任意一點，例如在點 C、D、E 等等，那末鉛筆就会画出和曲綫 AB 的切綫直交的許多像圖上用虛綫画出的曲綫裏面的一条，所有这些用虛綫画出的曲綫都一样情形，每一条都可以看做曲綫 AB 的漸伸綫. 这个結果可以敍述如下：平滑的曲綫具有不只一条而是無窮多条漸伸綫.

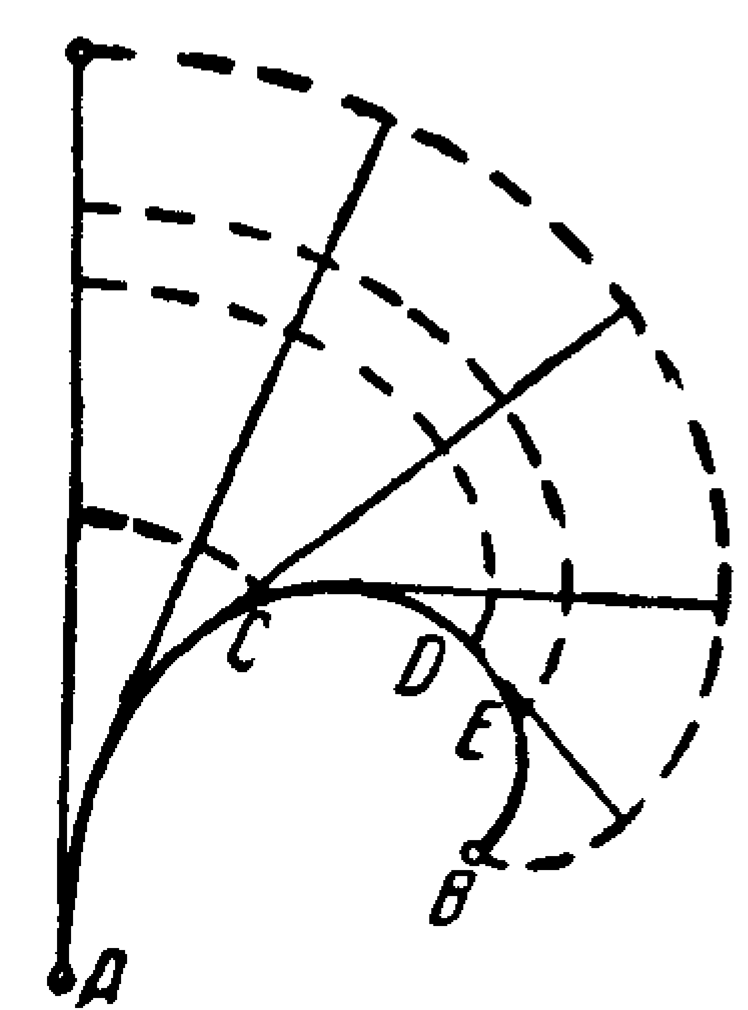


圖 75. 漸伸綫族

仔細看看圖 75，我們就会產生一种想法. 我們看出，对於某一已知曲綫來說，所有它的各个漸伸綫都是互相"平行"的——平行要用这样的意思來了解，就是說，曲綫 AB 的所有切綫在兩条漸伸綫中間的綫段都有相等的長度，就像在兩条平行直綫中間的所有公共垂綫的綫段都具有相等的長度

一样.

在实用上最重要的是漸伸綫下面的一个性質，这个性質由漸伸綫的作圖法立刻可以得出。弧 BC 的長度（見第 70 頁上的圖 72）等於直綫段 CM. 我們知道，不可伸縮的絲綫段 CM 是緊緊地貼合在弧 CB 上的. 从这裏就得到下面的定理：曲綫的弧長等於切綫由切點到和相应的漸伸綫相交的點这一直綫段的長度. 更精確一些說，弧 AB 的長等於切綫（在 A 点的）在切點和通过 B 點的漸伸綫中間的綫段的長.

到現在为止，我們談到的是下面的問題：求已知曲綫的漸伸綫（就是漸伸綫的作圖）. 但是可以提出反过來的問題：已知一曲綫，求作另外一条曲綫，使前者是後者的漸伸綫. 解決这个新的逆問題，將用到这个事实：漸伸綫的法綫垂直於原曲綫的切綫. 先作这已知曲綫的一些法綫——这曲綫是目前还不曾知道的某曲綫的漸伸綫. 作出的法綫數目越多，圖就越精確. 在圖 76 上画了七条这样的法綫.

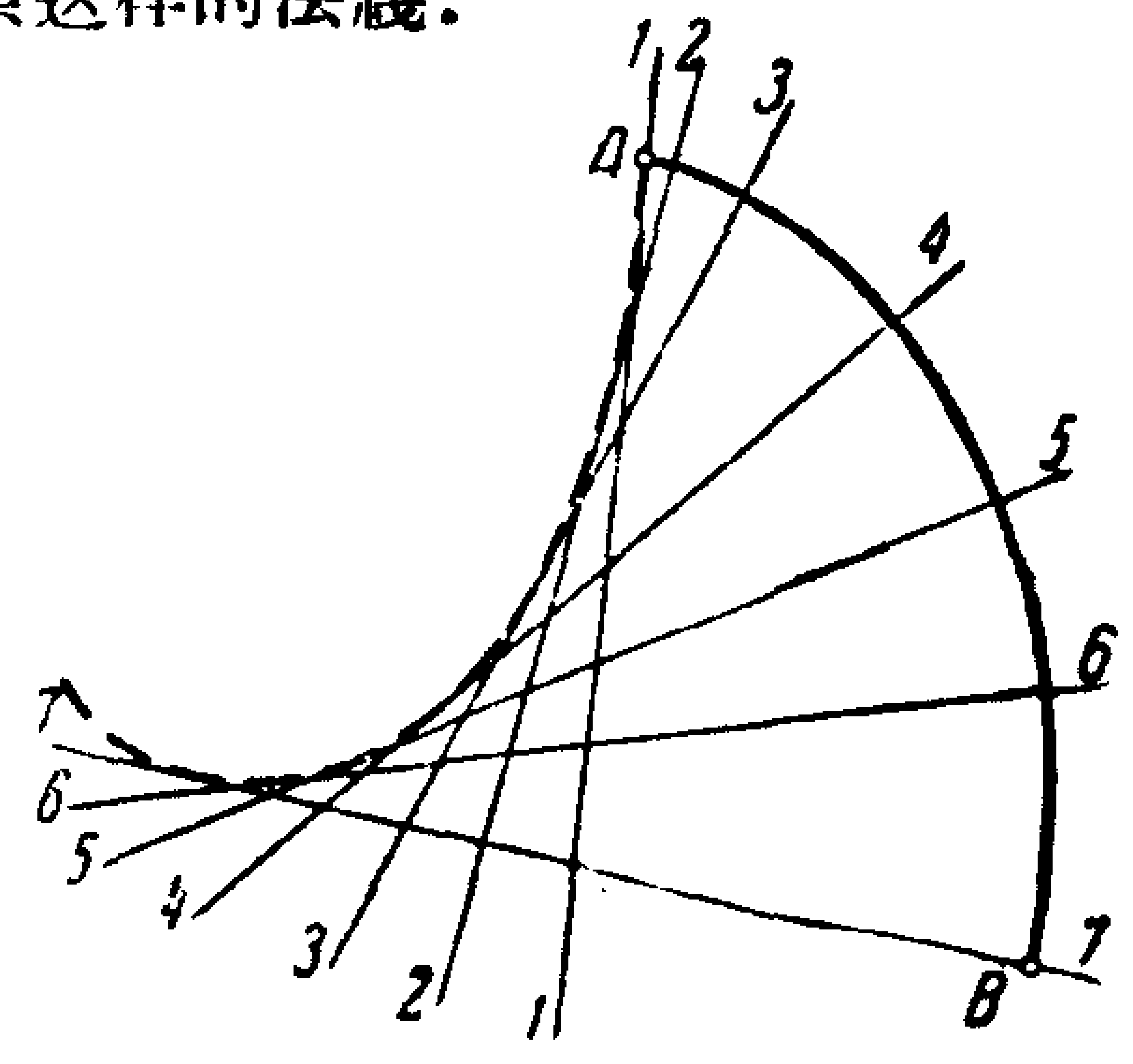


圖 76. 怎样根据漸伸綫找原曲綫?

順便講一下作法綫的適当方法. 假設要作曲綫 AB 在 M 點的法綫（圖 77）. 拿一面不太大的、边緣筆直的鏡子（如果拿一个發亮的金屬尺就更好）. 把鏡子垂直地立在紙上，直边放在下面，使直边通过點 M（圖 77 右方的鏡

子）。这样，曲綫在鏡子右方的部分就映入了鏡子裏，以致於顯出在點 M 有一折斷的曲綫（曲綫和它在鏡子裏的像在 M 點相交成某一个角度，像我們圖上 P 點画的）。小心地挪動鏡子，一直到曲綫和它鏡子裏的像联成一条平滑的（沒有稜角的）曲綫，像我們圖上右面在 M 點画出來的样子。現在用鉛筆順着鏡子的直边作一条直綫：这条直綫正是所求的法綫。

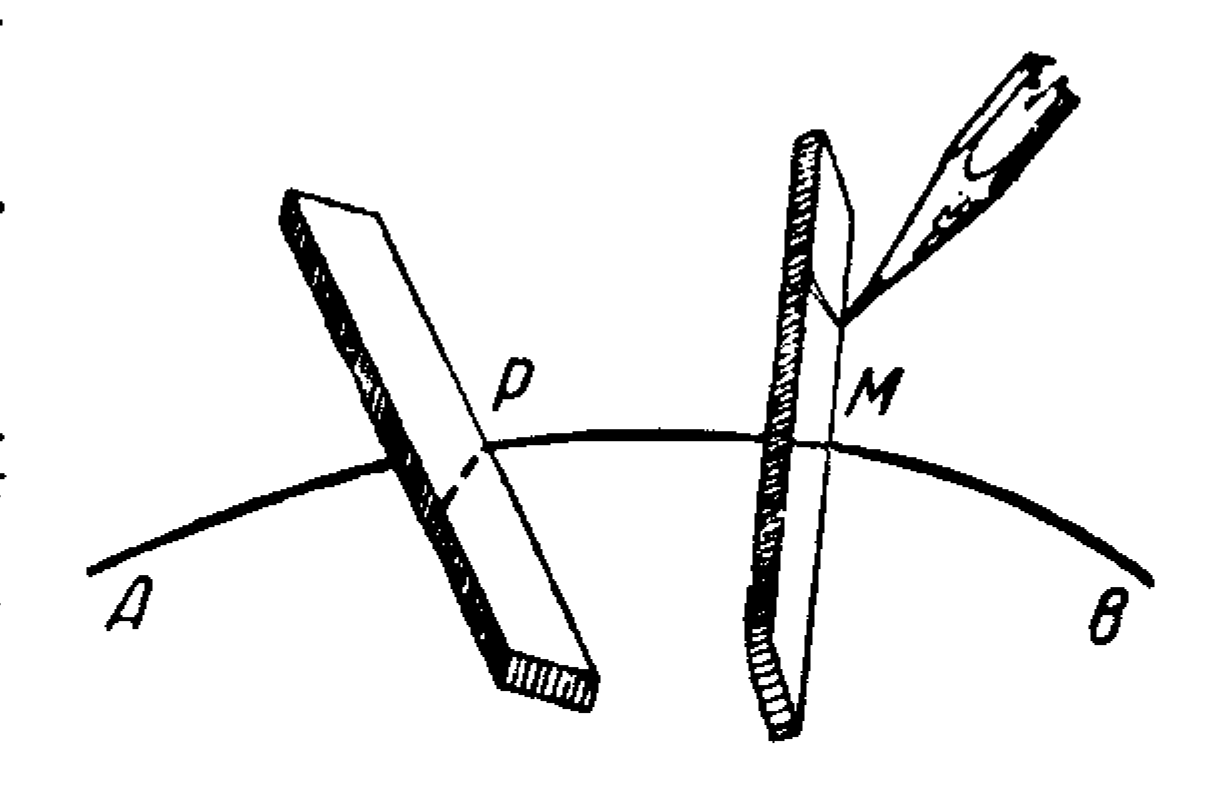


圖 77. 用小鏡子作法綫

学会了作法綫以後，再回到圖 76，在这圖上已經作了七条法綫。剩下的是要作一条曲綫和所有的这些法綫相切，換句話說，就是求作所有这些法綫的包絡（回憶一下，我們早在圖 20 裏就已經跟法綫的包絡打过交道了）。顯然，我們最初取定的曲綫將是作出來的这个曲綫的漸伸綫。这样，就解決了所提出的問題：我們按已知曲綫 AB，求出了以曲綫 AB 为漸伸綫的另一条曲綫。

法綫的包絡是研究曲綫性質的一个重要的輔助工具。它叫做原來已知曲綫的漸屈綫。因此，每一曲綫都是它的漸伸綫的漸屈綫，反过來，每一曲綫都是它的漸屈綫的一条漸伸綫。从邏輯的观點來看，漸屈綫和漸伸綫之間的關係正好像平方數和平方根之間的關係：如果 a 數是 b 數的平方，b 數就是 a 數的一个平方根。

我們已經看到，任一条平滑的曲綫都具有無窮多条互相

“平行”的漸伸綫．从用不可伸縮的絲綫求漸伸綫的作圖法裏，就很明顯地可以看出这个事实㊀．对漸屈綫來說，这就不很明顯了．是不是对任一条曲綫都可以作出它的法綫族的包絡？十七世紀的学者們証明，对所有他們曾經打过交道的曲綫來說，漸屈綫總是存在的．我們在下面就要証明，擺綫具有完全確定的漸屈綫．但是在一般情形，事情怎样呢？这是不是对任一曲綫都对呢？

要回答这一類問題，初等數学是無能为力的．但是在高等數学裏証明：**每一条平滑的曲綫都具有唯一的漸屈綫．**例外的只有那一种曲綫，它所有的法綫是交於一點的，和还有一种曲綫，它所有的法綫都是互相平行的．所有的法綫都交於一點的曲綫是圓（圓的法綫是半徑，大家知道，圓半徑是垂直於切綫的）．所有的法綫都互相平行的曲綫是直綫：直綫和它上面各點的切綫重合，它的法綫就是通过直綫上各點的互相平行的諸垂綫．最後的一般命題可以这样敍述：除直綫和圓以外，任一条平滑的曲綫都具有唯一的漸屈綫．

圓的漸伸綫

在數学書裏，即使是通俗的數学書裏，可以談到比如說甲虫嗎？可以的．不过話得从远处說起．

我們現在已經知道，圓並不具有漸屈綫．它所有的法綫

㊀ 只有在極嚴格的近代數学裏，才要求証明这样一个顯然成立的命題．不过說句公道話，近代數学不僅要求，而且实际也給出了証明．这些問題在高等數学叫做“微分幾何”的那部分裏加以考慮．

都相交於一點 —— 圓心。換句話說，圓的漸屈綫"蛻化"成一點了。但是圓具有漸伸綫(这並沒有什麼特別：我們知道任何平滑的曲綫都具有漸伸綫)。这个漸伸綫是擺綫的近親。

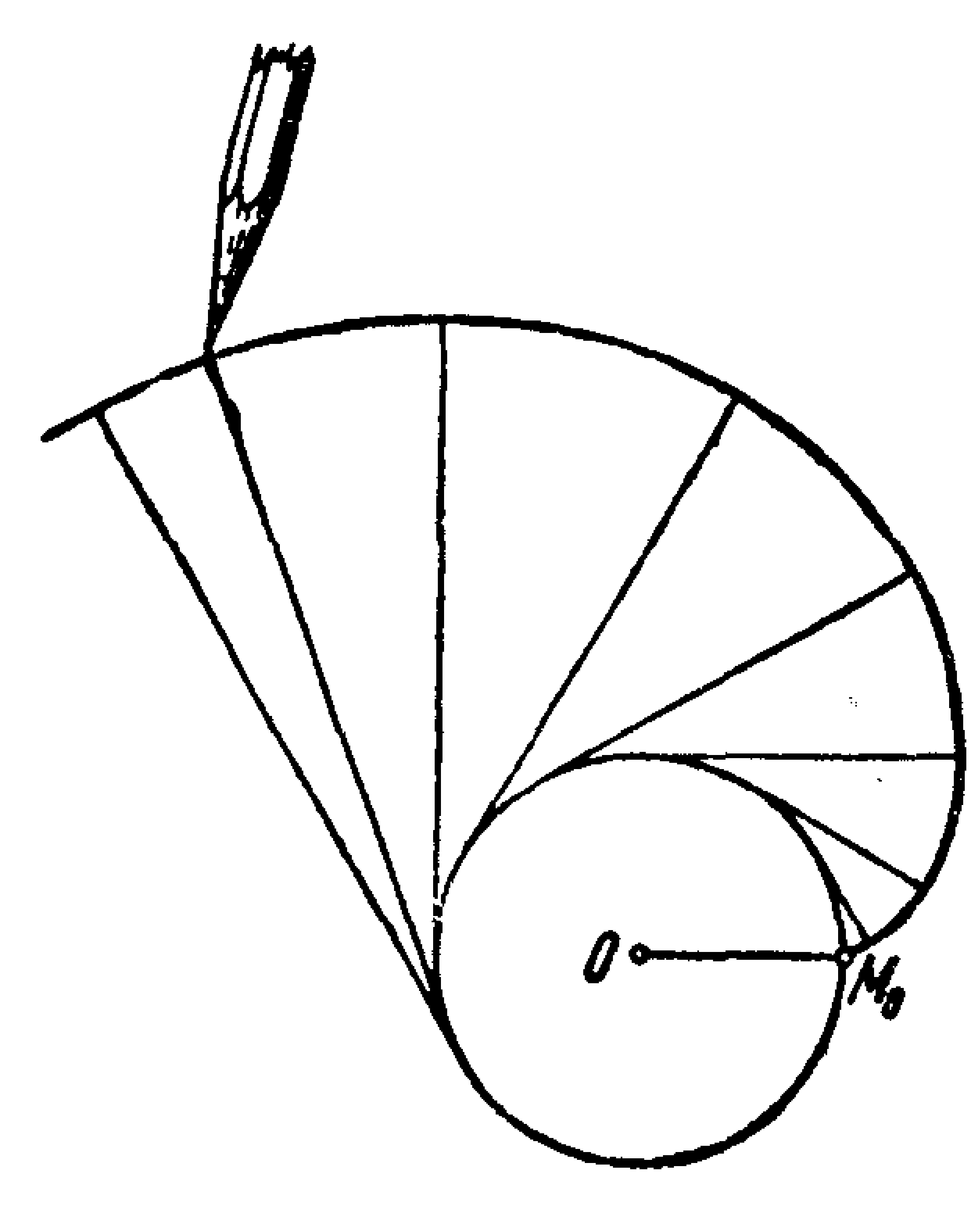


圖 78. 圓的漸伸綫

我們从作圖開始。把一个用膠板製成的圓片固定在紙上，把絲綫的一端固定在圓片的边緣上，並且使絲綫緊緊地繞在圓片的边緣上。在絲綫的另一端結一个小圈圈，好套進鉛筆的尖端去(圖 78)。这時候要是把絲綫"伸展開"，鉛筆就自動地画出了漸伸綫。当然，絲綫应当拉緊，而鉛筆尖应当緊貼着紙㊀。

圓的漸伸綫可以用另一种方法得到。試看一个半徑 a 的固定圓，和跟它相切於 M_0 點的直綫 AB(圖 79)。如果直綫 AB 無滑動地在圓上滾動，那末 M_0 點顯然地画出了这个圓的漸伸綫。事实上，对这曲綫上的任何一點 M 來說，滾動着的直綫 KM 一定是它的法綫，並且綫段 KM 的長等於固定圓上的 M_0PK 弧的長。

㊀ 比較簡單可是不太精確的画法，是用繞綫的軸來代替圓片，把綫時時刻刻拉緊，並从綫軸上伸展開，就可以画出漸伸綫.

这样說來，圓的漸伸綫就是"翻了一面的擺綫"。在擺綫的情形是動圓無滑動地在固定直綫上滾動，在圓的漸伸綫的情形是動直綫無滑動地在固定圓上滾動。

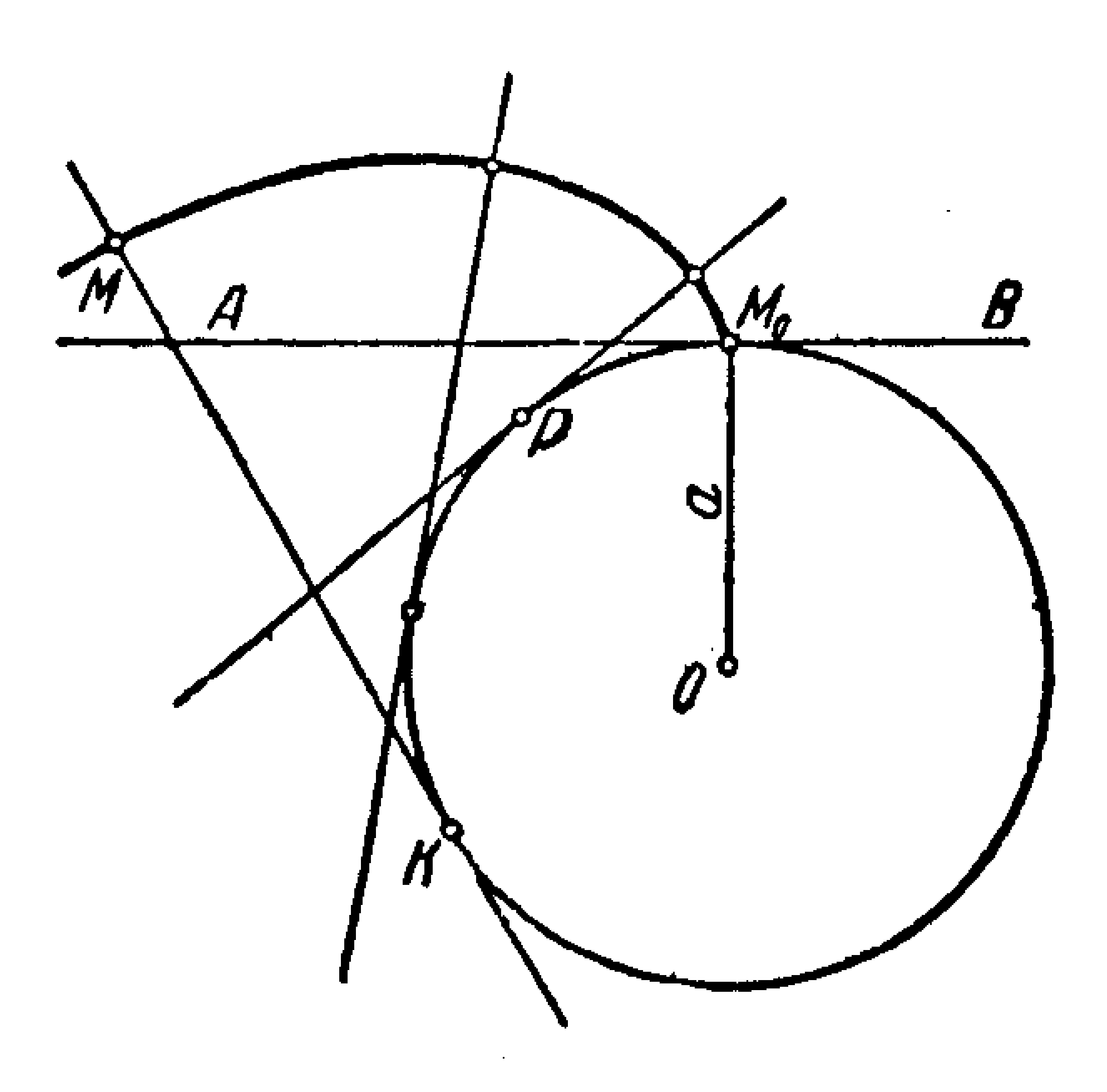


圖 79. 直綫在圓上滾動

在圖 80 上画了一副最簡單的蹺板。在圓柱形木墩上放了一塊木板 AB，使它的中點切於木墩。如果使板傾斜，会發生什麼情形呢？我們知道，木板要回到原來的位置，然後由於慣性，又要傾斜到另一边去，这样反覆地圍繞着平衡位置而搖盪。当然，要这样，木墩和木板就必須是粗糙的，不然的話，木板就会沿着圖上箭头所示的方向滑動。

为什麼木板会回到它原來的位置呢？这一點不难想通。

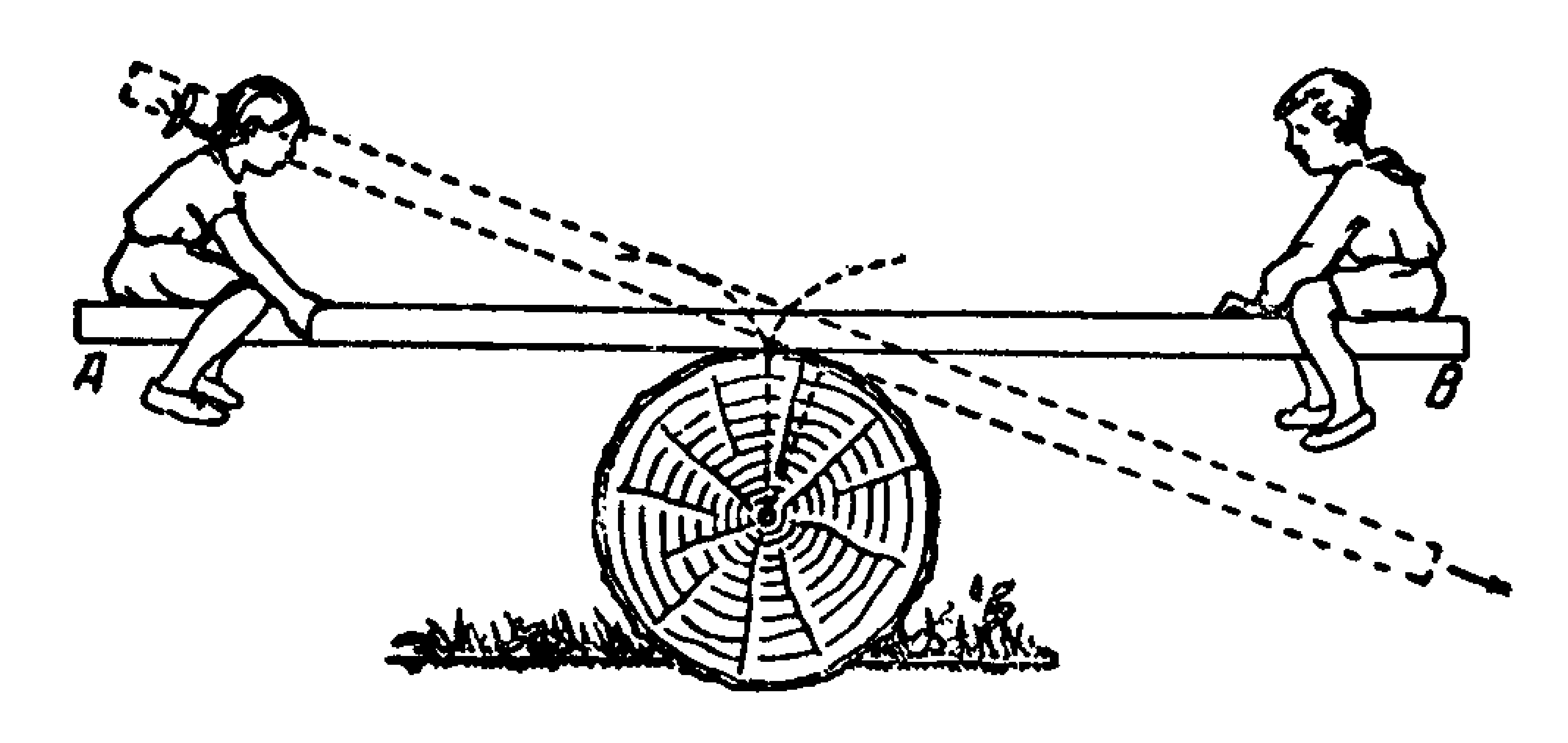


圖 80. 簡單蹺板

大家知道，任何物体在重力作用下它的重心是向下降的．要回答我們的問題，只要知道使木板从平衡位置略微傾斜時，它的重心（中心）作了什麼运動．

这一點我們現在已經清楚了！木板中心將要画出圓的漸伸綫上的一段弧．这一部分漸伸綫在圖 80 上用虛綫画出．我們看到，当木板略微傾斜時，它的重心上升了，这就說明为什麼木板要回到平衡位置．顯然，这个平衡是穩定平衡．

圓的漸伸綫和擺綫類曲綫間的親屬關係可以从另外的途徑來闡明．我們已經說过，在外擺綫或內擺綫（圖 66）的情形，使固定圓的半徑無限增大、而動圓的半徑保持不变，就得到擺綫．要是我們把注意移轉到紆迴外擺綫（第51-52頁），使固定圓的半徑保持不变、而動圓的半徑無限增大，或者說，把動圓"变成直綫"（圖 81），紆迴外擺綫就变成了圓的漸伸綫．

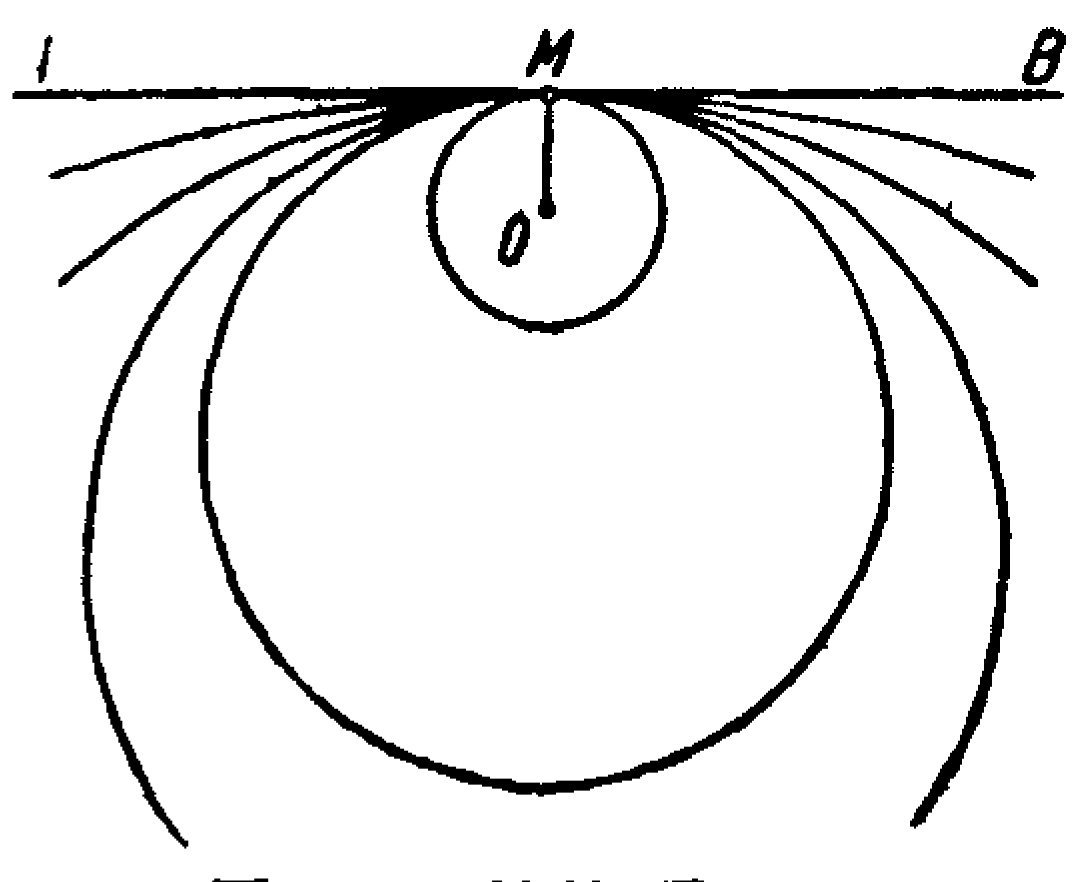


圖 81．动圓無限增大

我們不預备在这裏推演出關於求圓的漸伸綫的弧長和它的扇形面積的公式．我們只介紹一下現成的結果（圖 82）．漸伸綫弧 M_0M 的長度 l 和扇形 MOM_0 的面積 S，有下面的公式：

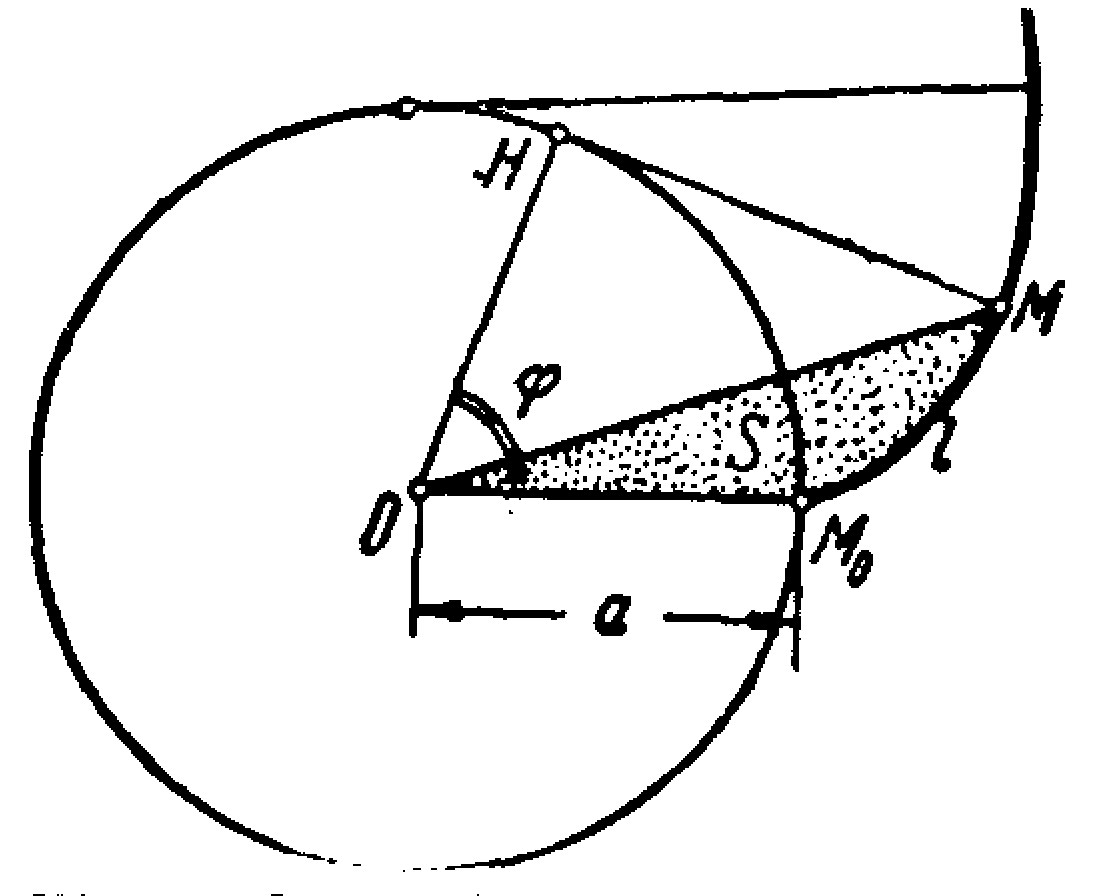


圖 82．圓的漸伸綫的弧長和扇形面積

$$l=\frac{a}{2}\varphi^2,$$

$$S=\frac{a^2}{6}\varphi^3.$$

这兩个公式，有趣的地方就在公式裏出現了角的二次冪和三次冪——这种情况可能使陌生人感到困惑。我們再一次着重的指出，这時的角 φ，必定是用弧度表示的。如果角 HOM_0 是角度，例如等於 $\alpha°$（α 角度等於 φ 弧度），公式就取下列的形式：

$$l=\frac{a\pi^2\alpha^2}{2\cdot180^2}=\frac{a\pi^2\alpha^2}{64800},$$

$$S=\frac{a^2\pi^3\alpha^3}{6\cdot180^3}=\frac{a^2\pi^3\alpha^3}{34992000}.$$

我們提醒讀者注意，角度 φ 弧度（或 α 度）是指我們圖上的 HOM_0 角，而不是漸伸綫扇形 MOM_0 的夾角！

甲虫數学家

拿一个紙的圓片（圖 83），把它从边上向圓心劃開（例如按 HO 半徑劃），把扇形 HOK 捲成像圖上所示的筒形。这筒的形狀很整齐：因为它是一个圓錐面，这圓錐面所有的母綫都

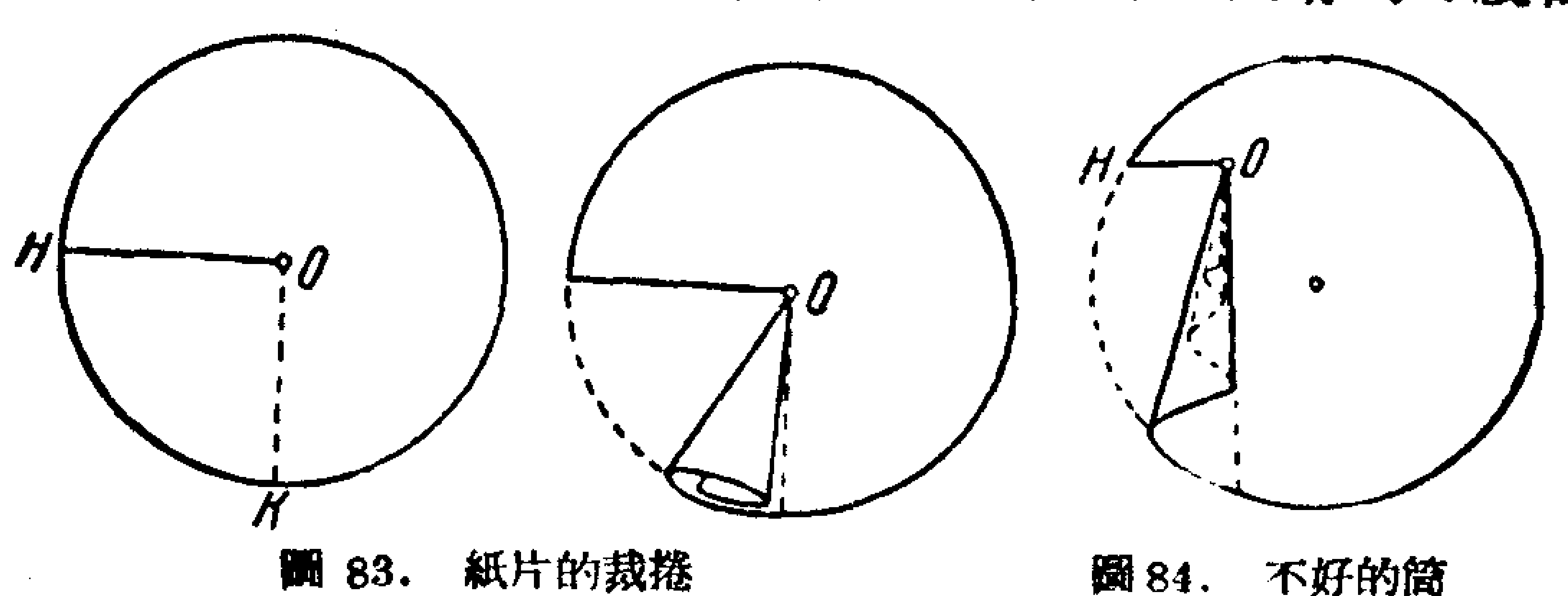


圖 83. 紙片的裁捲　　圖 84. 不好的筒

有相同的長度，因为它們都是同一个圓的半徑．如果我們按照圖84那样劃開，那末得到的筒就不整齐：因为圓錐面各母綫的長度彼此並不相等．

現在再拿一張紙片，它的边緣不是成圓形，而是一条任意平滑的曲綫，比如像圖 85 画的那样．如果在紙片內部任意取一點 O，沿 OH 劃開並捲成一个筒，得到的就不会是一个很好的筒，因为錐面各母綫的長度彼此不相等．無論我們怎样选擇點 O，我們都不能够得到一个比較好的筒，因为除了圓以外，对於任何曲綫都不能够找出到曲綫上每一點距离相等的一點．

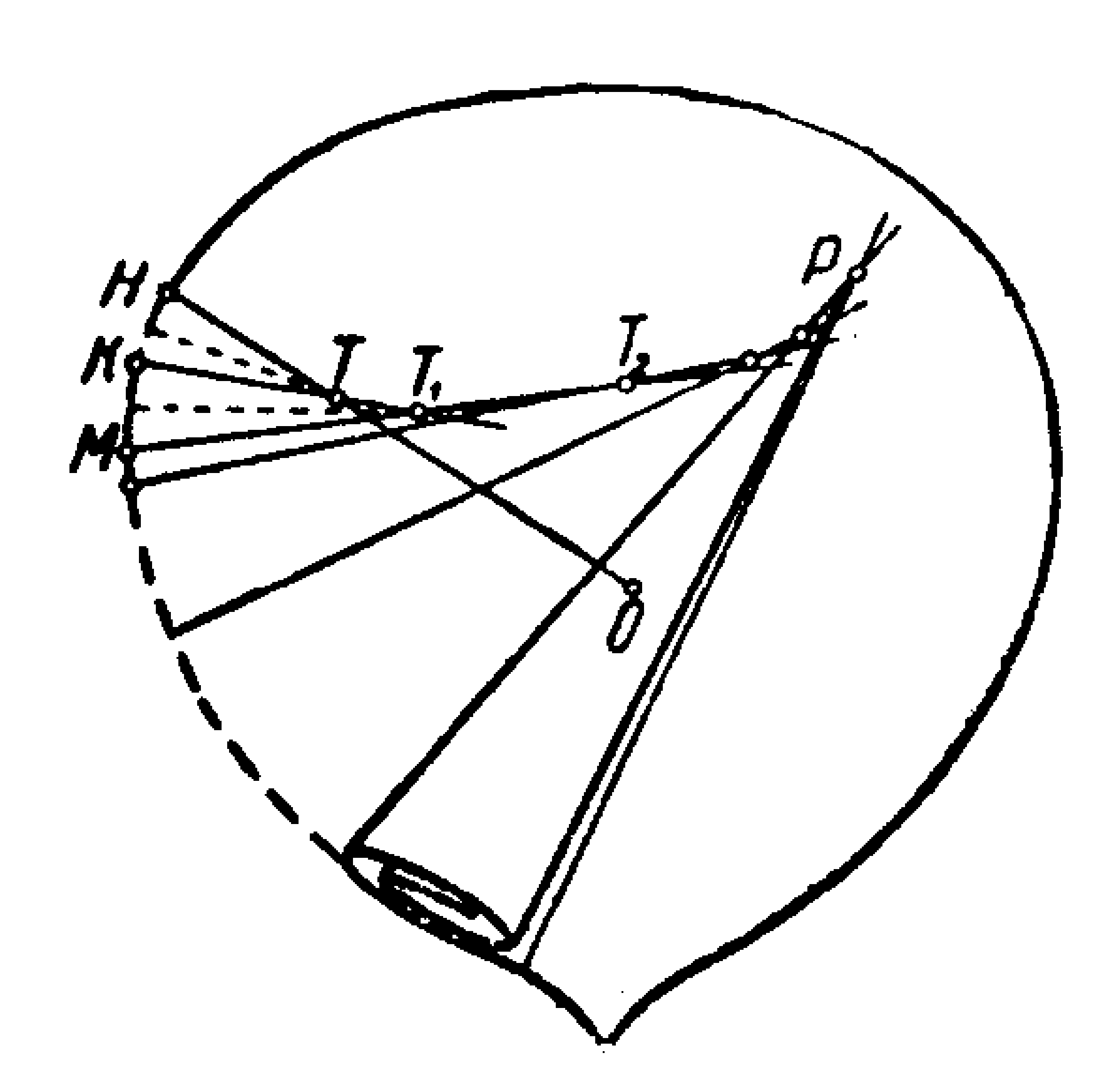


圖 85． 怎样剪樹葉呢？

这怎麼办呢？可得用另外的方法啦！在紙片的边緣上取一點H（圖85），並截取一小段弧 HK．把它当作是一小段圓弧來求它的圓心．这就得在點 H 和點 K 引法綫．兩条法綫的交點T，就是所求的圓心．再來看弧 KM，除開一个很小的誤差，也可以把它看做圓弧，但是它的圓心不和 T 重合；在點 K 和點 M 引边緣的法綫，求出它們的交點 T_1，这是一个不跟點 T 重合的點．繼續这样作下去，我們得到點 T_2，一般說來，得到一联串圓心，圍繞着这些圓心來捲紙片，得到的是整齐的紙筒．

現在再走最後的一步：把由各个圓心联成的折綫 TT_1T_2

……作成一条連續曲綫，使得到的紙筒是完全平滑沒有鋸齒的。很明顯，要達到这个目的，只要把联結“相鄰近”法綫的交點的折綫 TT_1T_2 ……換作平滑的曲綫——就是这些法綫的包絡，像圖86的曲綫 TP。

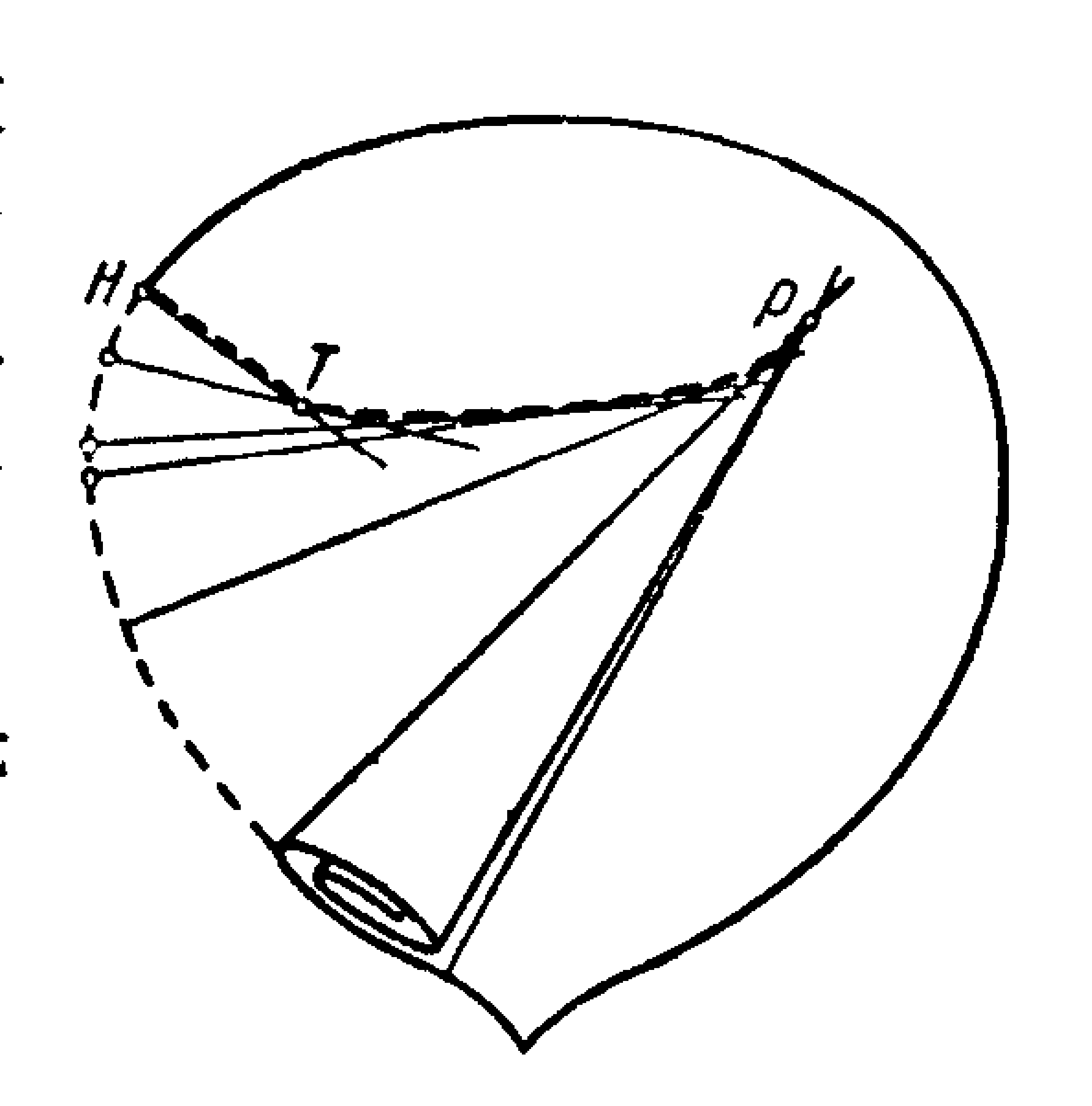


圖86. 怎样避免鋸齒?

但是我們知道，法綫的包絡是曲綫的漸屈綫。因此，为了要把紙捲成形狀最端正的尖筒，必須首先把紙片沿法綫綫段 HT 剪開，然而再沿着边緣的漸屈綫 TP 剪開。

無論是你們讀者們，無論是我，無論是誰，都未必需要去把一張紙片捲成一个筒（除了捲香煙，这時候也根本用不着考慮使每一条母綫都有相同的長度！）。因此，就实用價值來說，我們現在討論的問題是毫不足道的。但是得注意一件有趣的事：有一种甲虫，更正確些說，有好幾种甲虫，它們把葉子捲成筒來給它們的後代們当窩。这些筒应当是堅固和整齐的，它們应該不至於被風雨弄坏，不至於因为形狀美观和尺寸較大而引起敌人注意。我們的捲葉甲虫（屬於象虫一類的甲虫）却能够巧妙地解決这些複雜的數学問題。它能够沿着葉子边緣的漸屈綫把葉子咬開，然後再捲起來。圖87上画的是白樺樹葉和葉子的割口（更正確些說是咬口）。在圖88上画的是葡萄葉和葉上的尖筒。

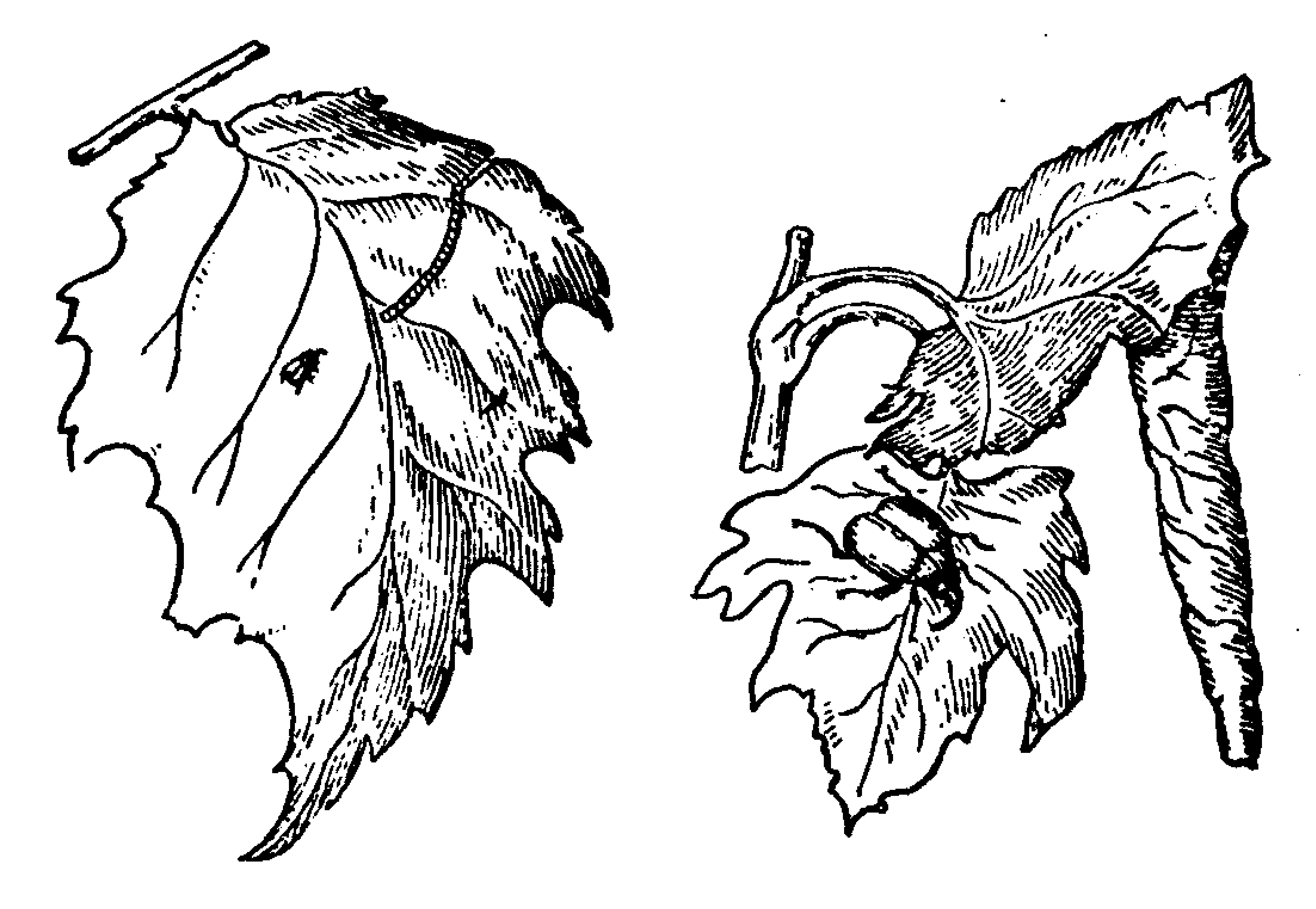


圖 87. 白樺樹葉　　圖 88. 葡萄葉和葉上的尖筒

当然，甲虫幾何学家解决这个極不簡單的問題完全是無意識的．經过長時期的自然淘汰之後，生存下來的主要是那些窩造得特別整齐的甲虫．結果就產生了一种本能，一代一代地遺傳下去．这种本能迫使昆虫們不知道幾何而解决複雜的幾何問題．注意，还有一种大家更熟悉的昆虫——蜜蜂，也能够解决一个並不更簡單的問題（当然也是無意識的）：造蜂房時，規定了巢室的數目和容積，怎样才能使巢室佔面積最小．这样，用的建築材料（蜂蠟）就最經济．

擺綫的漸伸綫．擺綫的弧長

前面举的幾个例子，帮助了我們熟悉漸屈綫和漸伸綫这兩个新的概念．現在我們已經有充分的準备來研究擺綫的漸

伸綫了.

当我們研究各种曲綫時,常常要作補助曲綫——已知曲綫的"伴隨曲綫". 比如我們曾經作过直綫和圓的蚌綫,圓的漸伸綫、正弦曲綫——擺綫的伴隨曲綫. 現在,从一条已知的擺綫出發,作一条和它密切相關的補助曲綫,也是一条擺綫. 把这样一对擺綫同時拿來研究,在某些方面比把它們分别研究來得簡單. 这样的補助擺綫叫作共軛擺綫.

試看擺綫的半个拱弧 AMB(圖 89). 我們不要因为这个擺綫位置的放法和平常不同而感到迷惑(这个放法是"头向下脚向上"的). 引四条直綫和準綫 AK 平行,並且和直綫 AK 的距离分别等於 $a, 2a, 3a$, 和 $4a$. 作相应於點 M 的母圓(在圖 89 上,这个圓的圓心用 O 表示). 迴轉角 MOH 用 φ 來表示. 那末,綫段 AH 的長等於 $a\varphi$(角 φ 用弧度計算)

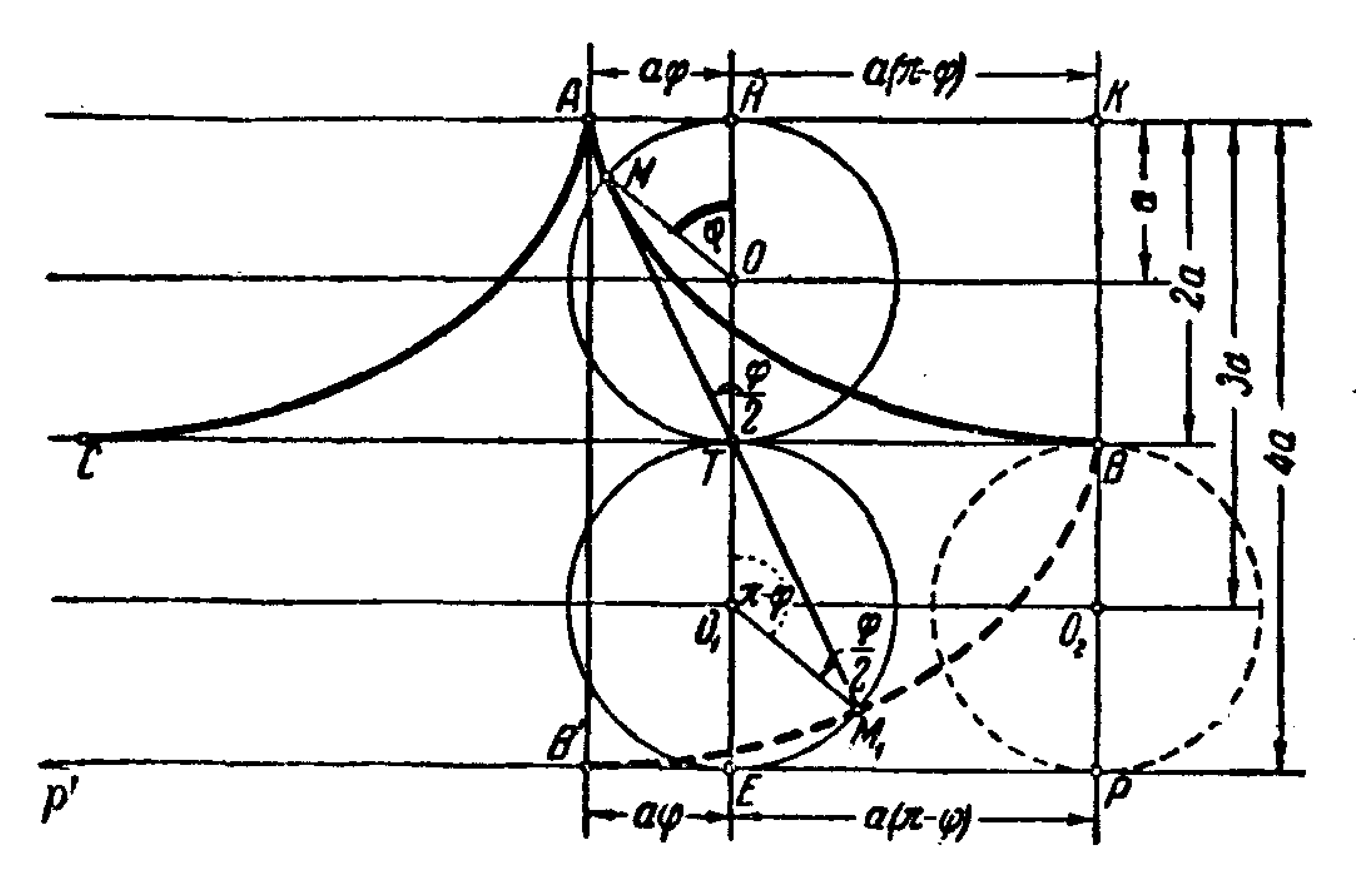


圖 89. 共軛擺綫

从 T 點把母圓的直徑 HT 延長出去，直到和直綫 $P'P$ 相交（交於 E 點）. 作以 TE 为直徑的圓（圓心为 O_1）. 作擺綫 AMB 在 M 點的切綫. 我們知道，要作这条切綫，只要作點 M 和點 T 的联綫就可以了（第 23 頁）. 把切綫 MT 从 T 點延長，使和補助圓相交，交點用 M_1 表示. 我們現在要研究的正是这种 M_1 點.

我們已經用 φ 來表示角 MOH 了. 因此角 MTH 等於 $\frac{\varphi}{2}$（同一个弧所对的圓周角）. 顯然，三角形 TO_1M_1 是等腰三角形. 因此，不僅角 O_1TM_1 等於 $\frac{\varphi}{2}$，而且角 TM_1O_1 也等於 $\frac{\varphi}{2}$. 於是，三角形 TO_1M_1 的角 TO_1M_1 就等於 $\pi-\varphi$ 弧度（記住 180° 等於 π 弧度）. 又可以看出，綫段 HK 的長顯然等於 $a(\pi-\varphi)$.

現在看圖 89 上用虛綫画的、圓心在 O_2 的圓. 从圖上可以清楚地看出來，如果这个圓無滑動地在直綫 CB 上滚動時，B 點画出的就是擺綫 BB'. 当虛綫圓轉了 $\pi-\varphi$ 角時，圓心 O_2 就到達 O_1 點，半徑 O_2B 就佔据了 O_1M_1 位置. 这样，我們作出的點 M_1 就成为擺綫 BB' 上的點.

在上面的作圖裏，对於擺綫 AMB 上的任意一點 M 对应了擺綫 BM_1B' 上的一點 M_1. 在圖 90 上，这个对应表現得就更清楚. 照这种方法得到的擺綫就叫作共軛擺綫. 在圖 89 和圖 90 上，用粗虛綫画出的擺綫，是用粗实綫画出的擺綫的共軛擺綫.

从圖 89 可以看出，直綫 MM_1 是共軛擺綫在點 M_1 的法綫. 事实上，这条直綫通过擺綫上的點 M_1 以及母圓和準綫的

切點 T（以前我們一直說这是母圓的“最低”點；但現在它是“最高”點，因为圖形倒过來了）。但是由作圖，这条直綫也同時是“基本”擺綫 AMB 的切綫。因此，原來擺綫切於共軛擺綫的每一条法綫。它是共軛擺綫法綫的包絡，也就是說，是共軛擺綫的漸屈綫。而“共軛”擺綫簡單地也就是原擺綫的漸伸綫！

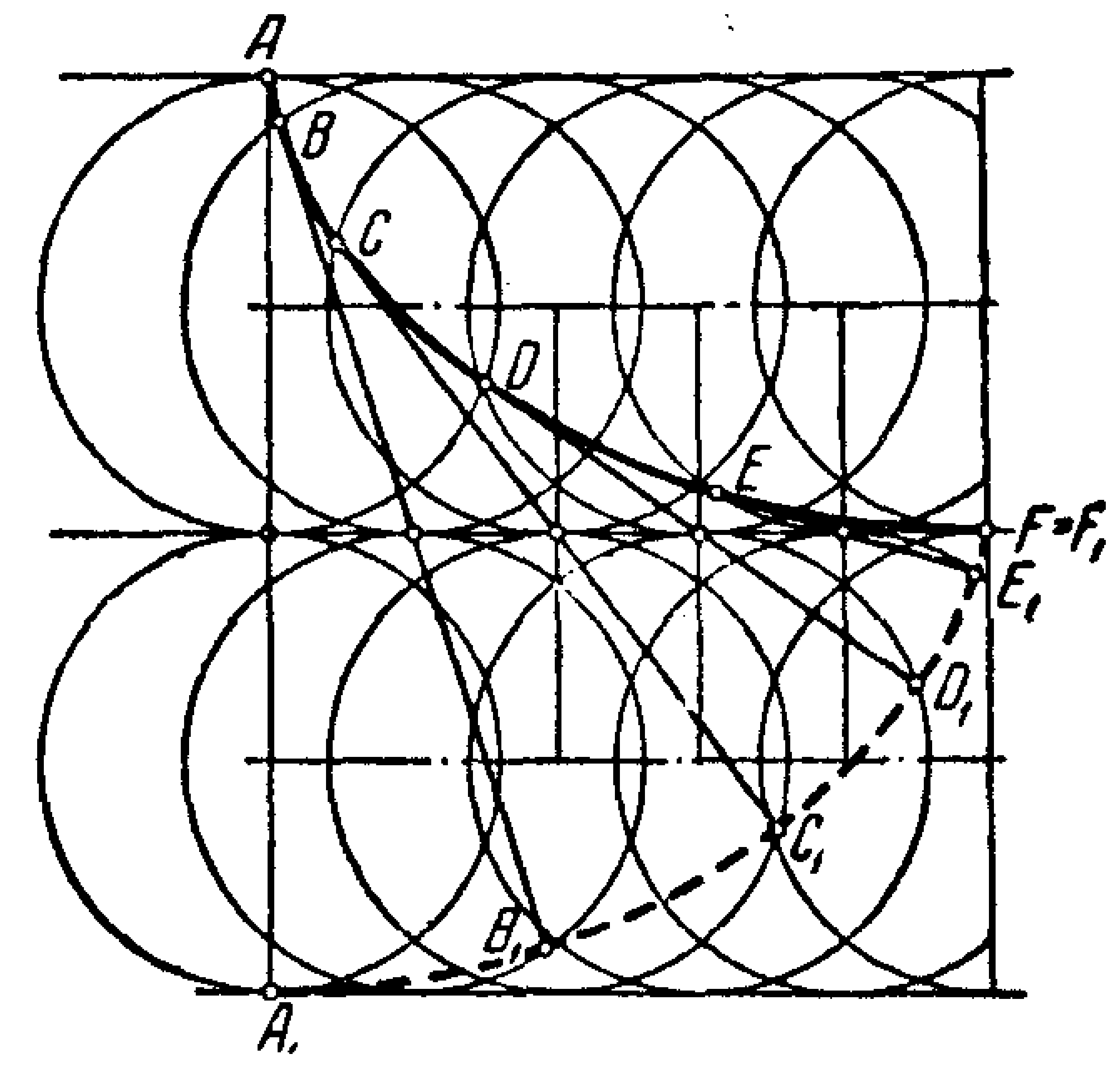
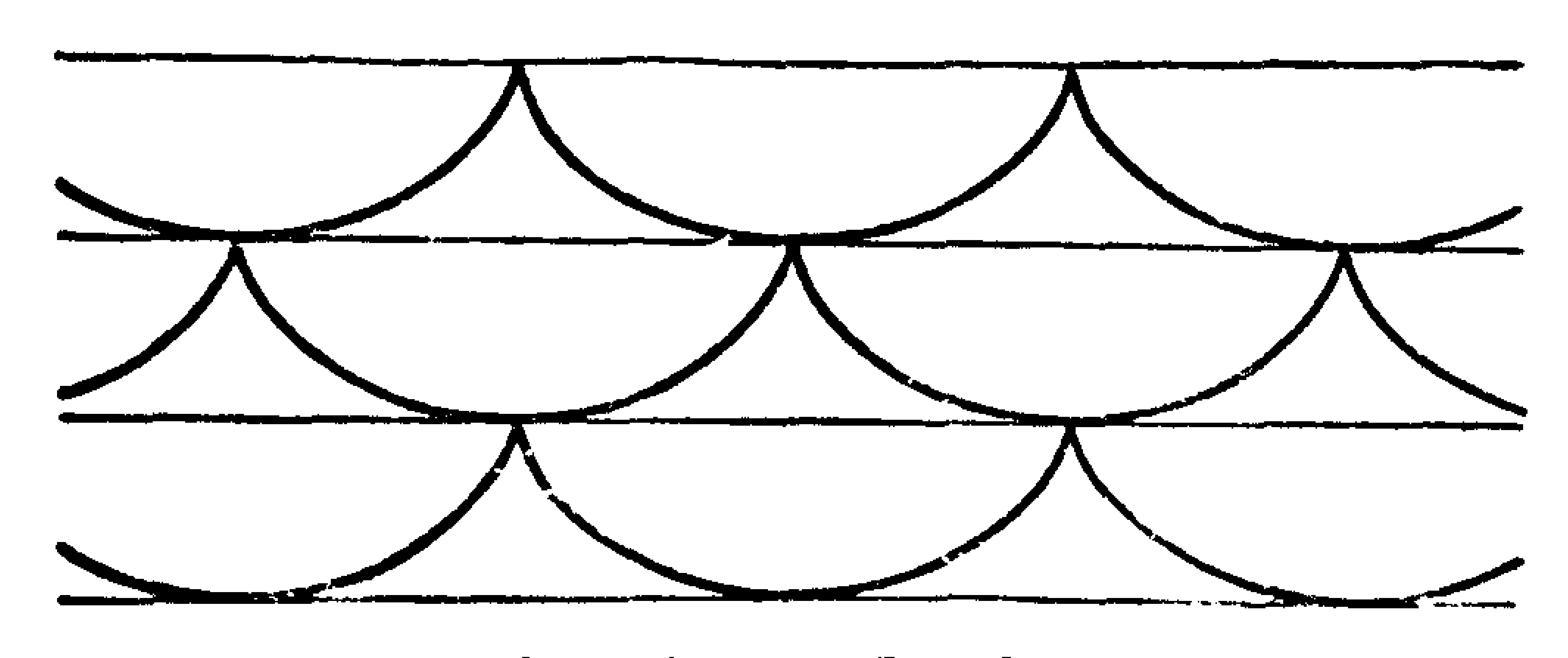


圖 90. 共軛擺綫間點的对应

从这些看起來很煩複而实質上很簡單的作圖，我們証明了荷蘭学者惠更斯發現的著名定理：擺綫的漸屈綫仍是同样的擺綫，只不过移了一定的位置。

如果不僅只对一个拱弧作漸屈綫，而对所有各拱弧都作漸屈綫（当然只是憑想像來作），然後再作漸屈綫的漸屈綫，这


圖 91. 擺綫的一系列漸屈綫

样繼續下去就得到像圖 91 那样的瓦塊堆疊圖形.

我們可以注意,在惠更斯定理的証明中,並沒有利用無窮小、不尽分割和近似值求法. 我們甚至連力学也沒有利用,虽然有時候引用了力学的表示法. 这个証明完全符合十七世紀学者們論証問題的精神,当時他們希望把靠各种提示性考慮得到的結果加以嚴格証明.

从惠更斯定理,立刻就可以得到一个重要的推論. 試看圖 89 上的綫段 AB'. 顯然这个綫段的長等於 $4a$. 現在假設貼緊擺綫弧 AMB 繞了一段絲綫,絲綫的一端固定在 A 點,在 B 點的另一端上繫一枝鉛筆. 如果我們把絲綫"伸展開",那末鉛筆將沿着擺綫 AMB 的漸伸綫而运動,也就是說,沿着擺綫 BM_1B' 而运動. 絲綫的長度等於擺綫的半个拱弧,顯然地它的長度等於綫段 AB' 的長度,也就是說等於 $4a$. 因此,擺綫的一个拱弧的長等於 $8a$,公式

$$l = 8a$$

現在可以看作足够嚴格地証明了.

圖 89 給我們的还要多. 它不僅給出了擺綫每一个拱弧弧長的公式,並且給出了擺綫任意一段弧的弧長公式. 事实上,弧 MB 的長度顯然等於綫段 MM_1 的長度,也就是說等於擺綫的切綫在相应母圓內的一段的長的兩倍.

類似的論証和作圖,使我們可以作出外擺綫和內擺綫的漸屈綫. 我們只列举現成的結果. 外擺綫的漸屈綫和原來的外擺綫相似,它的定圓圓心和原來的一样,然而定圓旋轉了一个角度等於 $\frac{\pi}{n}$ 弧度(就是 $\frac{180}{n}$ 度),这裏的 n 是定圓半徑和動

圓半徑長度的比．原來外擺綫和漸屈綫的相似比等於 $\frac{n}{n+2}$. 換句話說，比如定圓半徑三倍於動圓半徑，漸屈綫的綫性量度就是原來擺綫相应部分的綫性量度的 $\frac{3}{3+2}=\frac{3}{5}$ 倍．在圖 92 上画的是一个具有兩个歧點的外擺綫 ($n=2$)，以及接連兩次的漸屈綫．每一个都是關於前面一个旋轉了 $\frac{180°}{2}=90°$，每一个都是前面一个的二分之一（綫性量度）．

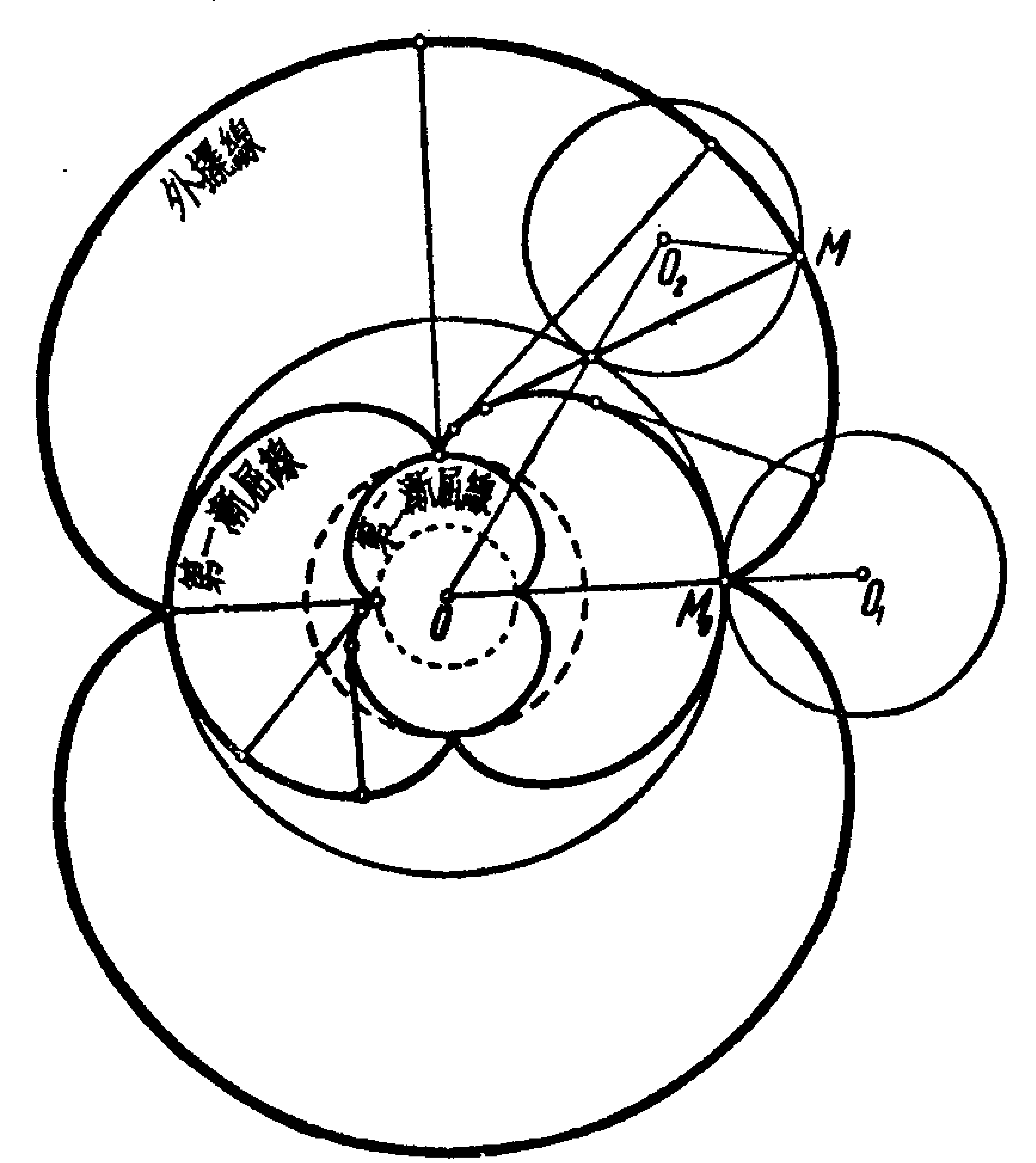


圖 92． 外擺綫的一系列漸屈綫

內擺綫的漸屈綫相似於原來的內擺綫，它的定圓圓心和原來的一样，也像外擺綫的情形，它的定圓相对於原來內擺綫的定圓旋轉了一个 $\frac{\pi}{n}$ 弧度．但是和外擺綫不同的是內擺綫

的漸屈綫比它自己要放大了，相似比等於 $\frac{n}{n-2}$. 圖 93 上画的是星形綫 ($n=4$) 和它的漸屈綫. 漸屈綫關於星形綫自己旋轉了一个 $\frac{180°}{4}=45°$ 角，並且放大了兩倍（当然是指綫性量度）.

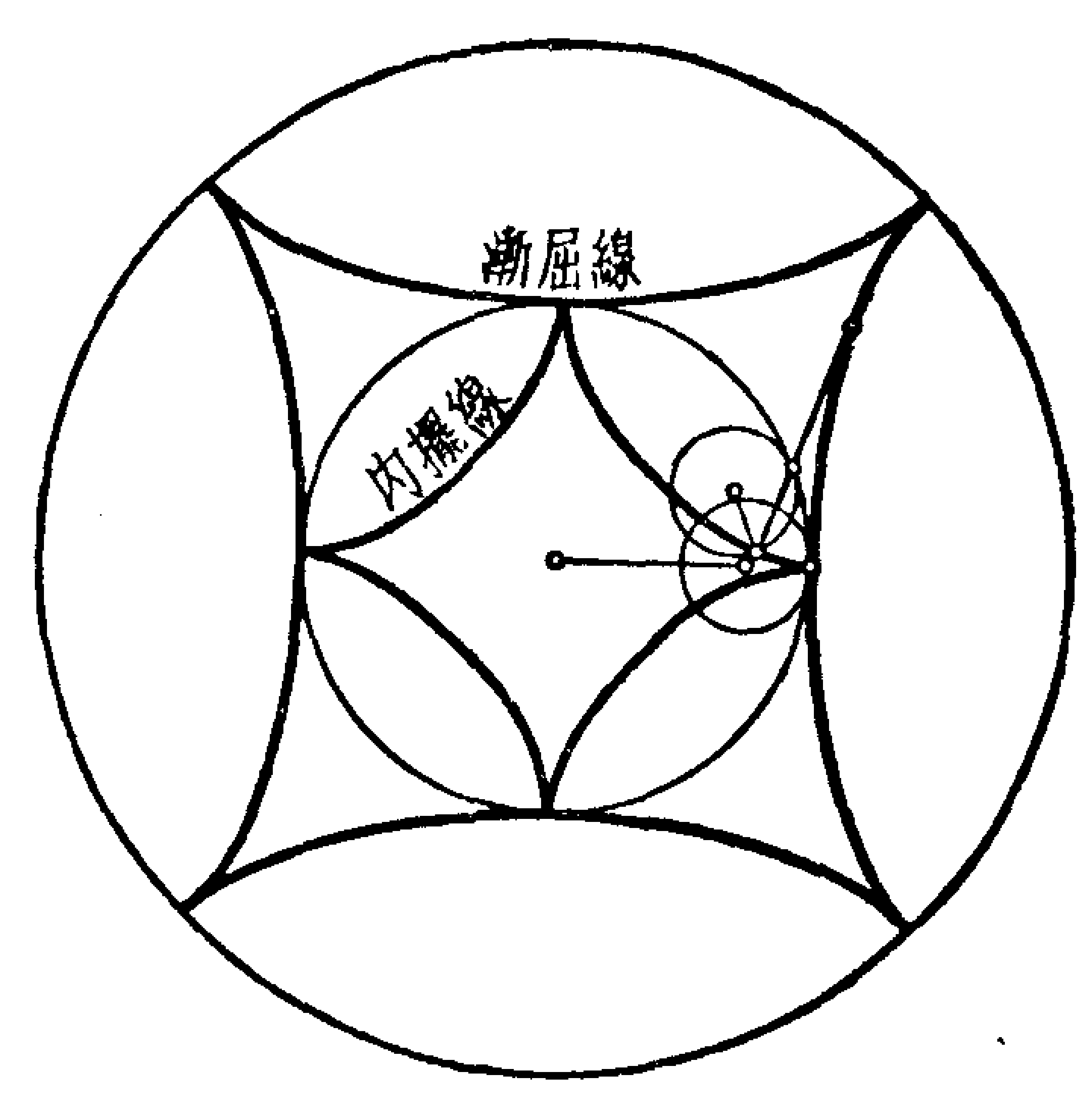
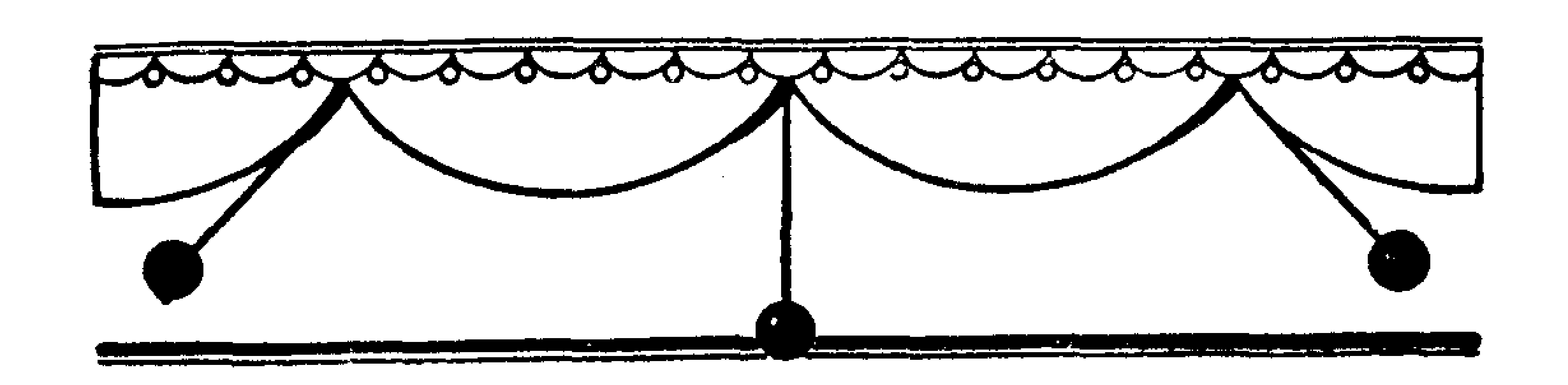


圖 93. 內擺綫的漸屈綫

最偉大的數学家和物理学家之一——牛頓曾經研究过內擺綫和外擺綫的漸屈綫，他也獲得了上述各个結果.

漸屈綫和漸伸綫的概念对於幾何本身以及对於应用都是非常重要的. 惠更斯就恰好为了物理問題而得出他那一条著名的定理. 我們現在就來談这一个物理問題吧.



第 五 章
最 好 的 擺

……不要只是讓鐘錶指示時間，

要使時間真正地推動鐘錶前進。

馬雅可夫斯基

克里斯坦·惠更斯和他的發明

“光荣的惠更尼”——俄國科学的奠基人米哈伊尔·華西里也維奇·罗蒙諾索夫，曾經这样称呼这位著名的荷蘭学者克里斯坦·惠更斯，不过他把拉丁語尾俄文化了.

惠更斯(1629-1695)是一位多方面的学者. 他在數学、应用力学和光学方面，都同样地有研究. 我們已經講过，在文藝復兴時代和十七世紀，这样的多方面性並不特别.

無論是托里拆利和卡瓦列里的“不尽分割法”或是笛卡兒和飛馬的机智的論証，惠更斯都同样地善於运用，並且所有用不十分有根据的方法得到的結果，他都給以一种古希臘式的無疵可尋的嚴格証明. 他最愛好的就是嚴格而精確的証明. “結論並不像正確的推演以及清楚明白的証明那麼重要”. 他

曾經这样說。

惠更斯享有發明擺鐘的荣譽。他研究了擺鐘的理論，並且第一个製造出这种鐘來。到如今，擺鐘(掛鐘——虽然是廉價的掛鐘)已經在日常生活中得到最廣泛的应用。但是擺鐘的意义比这还大得多：最準確的、保証天文台作業用的鐘就是擺鐘。在惠更斯的"論擺鐘"一書裏，包括了一系列輝煌的數学發現。

除了力学、物理学、天文学方面的發明以外，惠更斯还在數学方面得到了一系列新的結果。他証明了連分數理論中最重要的一些定理；他和飛馬，巴斯噶同時奠定了或然率理論的基礎；計算出了旋轉橢圓面和旋轉拋物面的面積。他还得到一系列關於圓的定理，这些定理可以用來計算 π 的數值達到在当時絕無僅有的精確度。他也研究了漸屈綫的理論，並且用來研究擺綫。他的这些研究和關於擺鐘的工作有最密切的联系。

擺鐘。为什麼普通擺(圓周擺)不好？

"正直的伽利略是对的！"普希金在評定伽利略關於地球繞着太陽轉的說法的時候，是这样寫的。然而我們要講的却是这位偉大的战士怎样在科学上犯过一次錯誤。

伽利略观察教堂裏的掛灯的擺動，發現掛灯每作一次完全的擺動所需要的時間，也就是說灯从某一个位置出發再回到这个位置中間所經过的時間(所謂擺動週期)，是同擺幅的大小沒有關係的。这种观察使伽利略想到，擺動的物体(擺)

可以用來調節鐘錶的走動.

伽利略自己並沒有製成擺鐘,不久人們也明白了他的观察並不精確. 从更精確的观察知道,擺的擺幅越大,擺動週期也就越長;但是由於軸之間不可避免的摩擦以及空气的阻力,普通擺的擺幅總是在逐漸縮小,这就是說它的擺動週期也在逐漸縮短. 用普通的擺製成的鐘也就不可能走得很準. 普通的擺也叫做圓周擺,因为它上面每一點都画出一个圓弧.

惠更斯想出了用什麼方法才可以使圓周擺的擺幅保持一定大小(用物理学的話來講就是振幅一定). 但是他还解決了另一个有趣的問題——一个點在什麼样的曲綫上运動它的振動週期方才可以和振幅無關(也就是說,每一次振動所花的時間和振動的大小沒有關係). 他想到了一种設計,使擺的重心在这样一条曲綫上运動. 讀者一定猜中这条曲綫就是擺綫:不然的話我們何必在这裏來談它呢?

先來講用什麼方法可以保証用圓周擺的鐘可以走得很準. 齒輪 A(圖94)被掛在軸上的擺錘 B 牽動. 軸的一端緊緊地銜接着另一个小齒輪(圖上沒

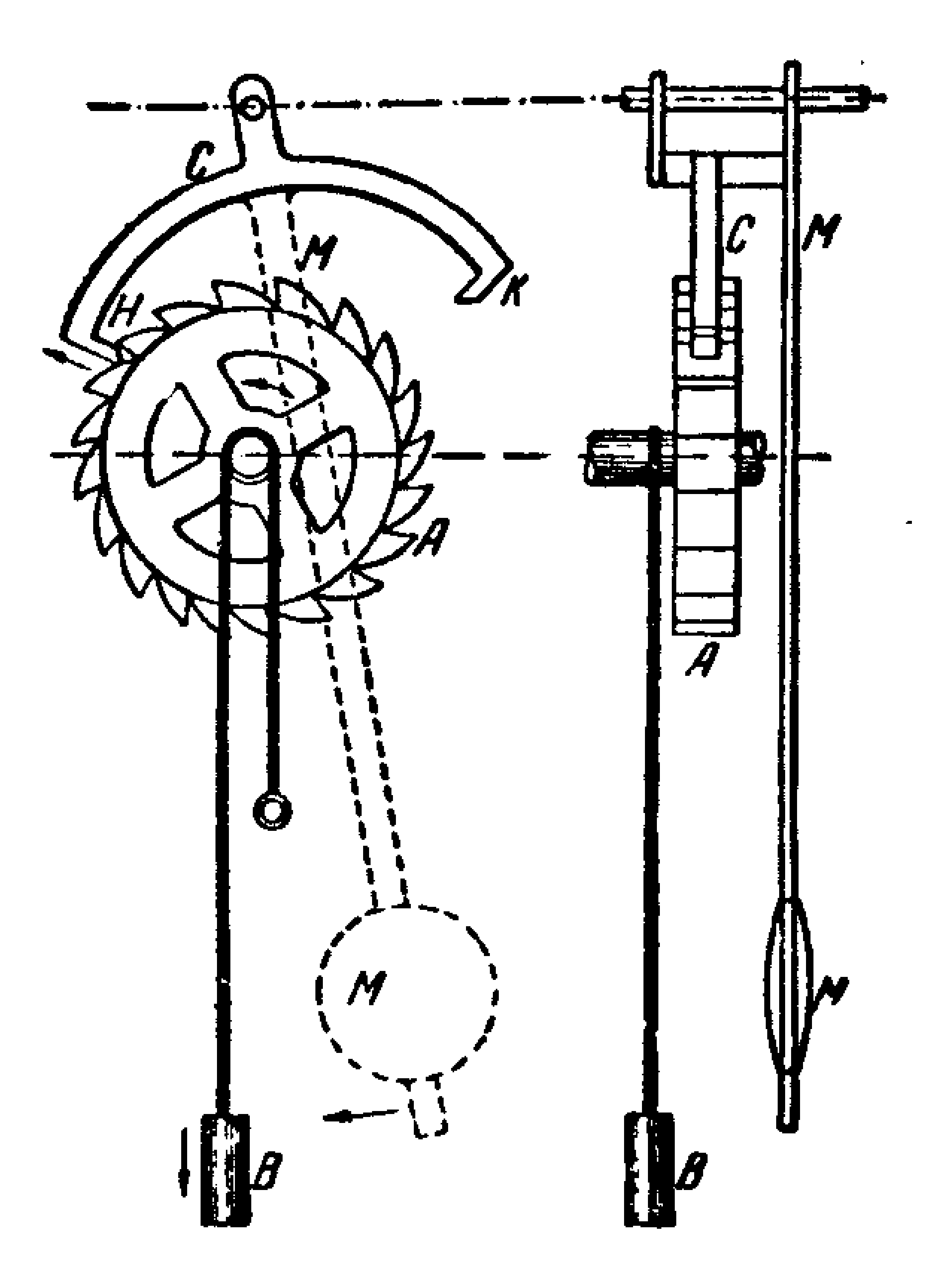


圖94. 擺鐘的構造

有画出來)．小齒輪帶動指針，因此 A 必得要按均匀的速度运動才行．

但是擺錘 B 正像一般物体一样，在重力作用下作加速运動，这个加速度也就傳遞給了齒輪 A．为了消除这种麻煩，就得用 MM 擺．

和齒輪 A 在同一平面上的擒縱器 C 和擺 MM 連接，擺 MM 本身在这个平面的後面，所以用虛綫表示．擒縱器上有 H 和 K 兩个齒．

圖 94 上画的是齒輪 A 被擒縱器的左齒 H 扣住的一刹那．当擺向左擺時，擒縱器的左齒就放開了齒輪，於是齒輪開始轉動，但是只轉过半个齒，因为这時候擒縱器的右齒 K 又落到了輪齒上，把齒輪扣住了．当擺再度向右擺時，这方面的輪齒又被擒縱器的齒擋住了．所以擺每擺動一次(來回一次)，齒輪就匀速地錯过一个齒去，也就是轉了圓周的若干分之一。齒輪的运動將是嚴格的匀速运動．

擒縱器的齒形狀就像圖 94 上画的那样，是斜而尖的，被擒縱器扣住又放開的輪齒，就一定会順着擒縱器的齒的斜面移動．因此擒縱器就把不大的推動力傳遞給擺．这种週期性的推動力就補充了鐘擺克服摩擦力和空气阻力所消耗的能．所以擺幅(振幅)就不致於变小．这样看來，錘的作用就是向擺和齒輪傳遞能量，同時也就調整了鐘的行走．

如果鐘停了呢？要它再走也不难：只要把錘升高並且使擺擺動就行了．但是这样一來，擺幅就不一样了，鐘走的速度虽然均匀，不过是不準確了(或快或慢)．惠更斯想出了一个

調節鐘錶的很容易的办法。但是認真的学者惠更斯却又關心到这样的問題：什麼样的擺是"完善的"擺——擺動的週期和擺幅沒有關係的擺？關於惠更斯怎样解决了这个問題以及擺綫在这裏起了什麼作用，这正是我們現在就要說的。

惠更斯的"陶塔赫隆娜"曲綫

讀者不要被这个奇怪的希臘字嚇住。"陶塔赫隆娜"的意思只不过是"等時"罢了。惠更斯想找到一种曲綫，使得当擺的重心在这种曲綫上运動時，擺動週期和擺幅大小沒有關係；惠更斯就把这种曲綫叫做"陶塔赫隆娜"。結果他得到了成功：在開始研究擺綫以前不久，陶塔赫隆娜的秘密被發現了。在这裏惠更斯表現了卓越的才智。只要举出下面这一點來就足以說明了：關於漸屈綫的理論就是在解决这个問題的过程裏創立的。

惠更斯是照下面的方法思考的㊀。把一个槽軌作成擺綫的形狀，像圖 95 画的那样。使一个重的小球 M 在这个槽軌裏滑動。我們考慮理想的情形——假設沒有摩擦，沒有空气阻力。

我們用 M_0 和 M_0' 來表示擺綫的歧點，用 a 來表示母圓的半徑。作一个半徑 a 的圓（圓心是 O）切擺綫於頂點，又作相当於擺綫上點 M 的母圓（用虛綫画的圓）。假設小球已經放

㊀ 我們这裏对於惠更斯的思考的敍述，比他原來的要簡單些，並且是用近代的術語來表達的。这样，我們的講法就比較容易使大家接受，但是在表現的生動性方面却很有損失。——这僅僅是一种"不太逼眞的臨摹"。

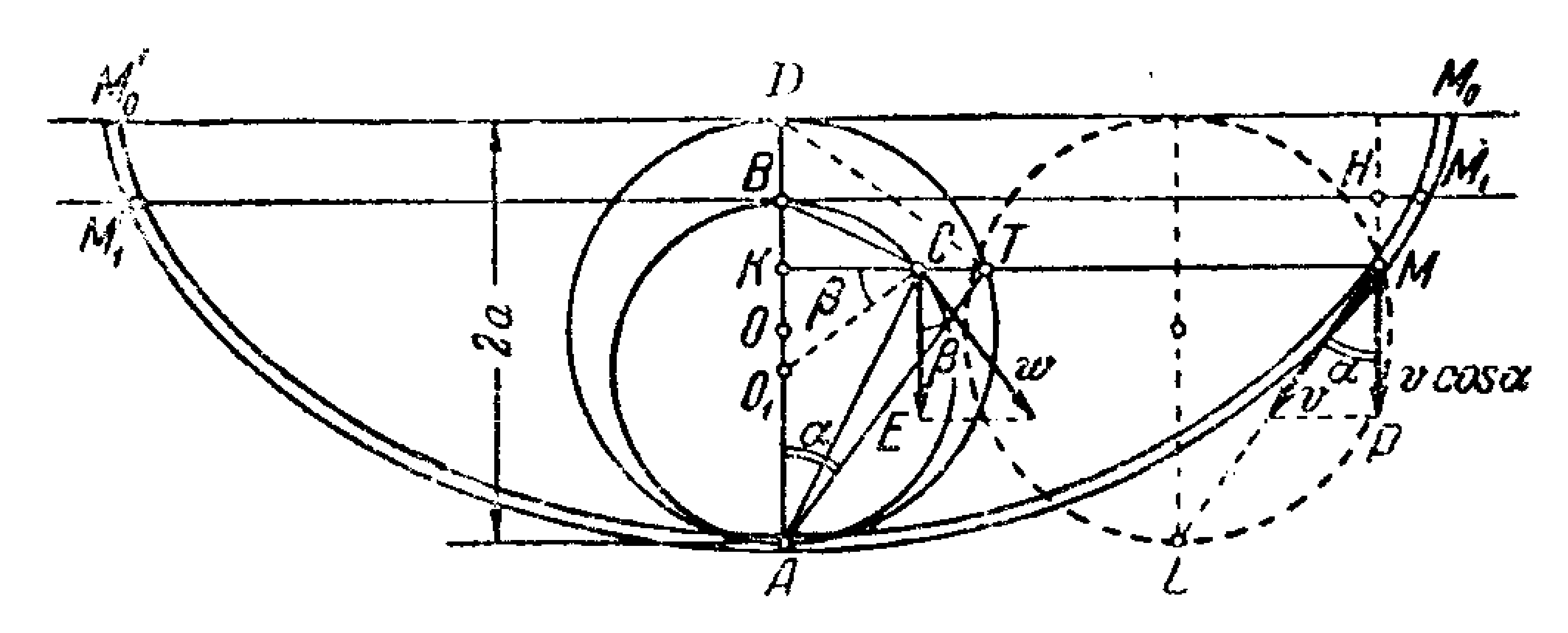


圖 95. "擺綫擺"的理論

在槽軌上的 M_1 點，不加推動使它按重力的作用滑落下來．現在我們來研究一下它的运動．

小球到達擺綫上的 M 點時，它的速度是什麼呢？这个不難求出．从點 M_1 落到點 M，小球的位能減少了一些．这位能的損失等於小球的重量 mg（m 是小球的質量，g 是重力加速度）和"降落高度"的乘積——降落高度是指小球在位置 M_1 的高度和在位置 M 的高度兩者的差，而高度是相对於某一个固定的水平面來計算的，例如，以地平面为标準來計算高度．但是不管用什麼水平面作标準來計算高度，在我們这个情形所講的高度差總是等於綫段 HM．因此，小球位能的損耗等於 $mg\cdot HM$．

但是按照能量守恆定律，小球損失的位能轉变成了它运動的動能，大家知道，動能等於 $\frac{mv^2}{2}$，这裏 v 表示小球的还待求出的速度．这个動能等於損失的位能，就得到方程式

$$\frac{mv^2}{2}=mg\cdot HM,$$

从这个方程式立刻就可以求得要求出的速度

$$v=\sqrt{2g\cdot HM}.$$

这个速度的方向也不难定出。它正是擺綫的切綫方向，也就是弦 ML（圖 95）的方向，这裏 L 是母圓的"最低"點。

我們对於速度 v 本身还不像对於它在竪直綫上的射影那样有兴趣，也就是說，对於"小球的滑落速度"还不像对於小球高度变化的速度那样有兴趣。这个在竪直綫上的射影很容易計算出來：它等於 $v\cos\alpha$，这裏 α 是弦 ML 和竪直方向所成的角。圓心是 O 的圓的弦 AT 顯然平行於並且長度等於弦 ML，因而角 LMP 等於角 KAT，这在圖 95 上已經标明出來了。因此：

$$v_{\text{竪直方向}}=MP=v\cos\alpha=\sqrt{2g\cdot HM}\cos\alpha.$$

我們將要把到現在为止还不熟悉的在擺綫上的非勻速运動同在中学裏仔細学过的在圓周上的勻速运動來作比較。为了这个目的，我們作一个補助圓。惠更斯的作圖方法是这样：通过擺綫的頂點 A 引底的垂綫 AD（圓心是 O 的圓的直徑），通过小球运動的起點 M_1 引底的平行綫 M_1B。把所引的平行綫和垂綫的交點用 B 來表示。用 AB 作直徑作一圓，就是要求的補助圓。到現在，我們还不清楚这个圓比其他的圓好在什麼地方。这一點，在逐步闡明惠更斯的思考進程中就会逐步明確起來。

開始先这样：把小球竪直方向的运動速度和補助圓上的要素联系起來。我們有：

$$MP=\sqrt{2g\cdot HM}\cos\alpha=\sqrt{2g\cdot BK}\cos\alpha, \quad (*)$$

因此，$HM=BK$。由三角形 AKT 得到：

$$\cos\alpha=\frac{KA}{AT}.$$

但是$AT=2a\cos\alpha$，因此$\cos\alpha=\frac{KA}{2a\cos\alpha}$，或者$\cos^2\alpha=\frac{KA}{2a}$，从这裏就得到

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{AK}}{\sqrt{2a}}.$$

把求得的餘弦值代入表示 MP 的式子(*)中去．得到：

$$MP=\sqrt{2g\cdot BK}\ \cos\alpha=\sqrt{2g\cdot BK}\cdot\sqrt{\frac{AK}{2a}}$$
$$=\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot\sqrt{BK\cdot AK}.$$

最後一个根式等於綫段 BK 和 AK 的比例中項，也就是等於三角形 ABC 的高 CK 把 AB 分成的兩个綫段的比例中項．但是根据熟悉的關於直角三角形中比例綫段的定理，这个比例中項正好等於高 CK：

$$BK\cdot AK=CK^2.$$

所以，最後得到的小球在擺綫上运動的豎直速度 MP，可以用下面的公式表示：

$$MP=\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot KC.$$

數量 a 和 g 都是一上來就給定了的，和點 M 以及它的最初位置 M_1 都沒有關係．这样，小球在擺綫上的运動完全可以由補助圓上的弦 KC 來决定，也就是說，最後是决定於 C 點在補助圓上的位置．

考慮 C 點在補助圓上的匀速运動，角速度是每秒 $\sqrt{\frac{g}{a}}$ 弧度，也就是每秒 $\frac{360}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{a}}$ 度．C 點在圓周上运動的速度等於圓半徑乘上以弧度表示的角速度(每秒)，也就是等於

$$\frac{AB}{2}\cdot\sqrt{\frac{g}{a}}.$$

这个速度在竪直方向的量等於什麽呢？換句話說，用上面这样的速度在圓周上作匀速运動的點 C，它和直綫 M_0M_0' 間距离变動的速度应該是什麽呢？这个速度並不难算。

在圓周上运動的點，它的速度 w 必然沿着圓周的切綫方向，也就是垂直於半徑的方向。速度 w 在竪直方向的射影等於 w 自己乘上角 β 的餘弦（圖 95）。但是角 β 顯然等於角 KCO_1：因为这兩个角都是角 O_1CE 的餘角。角 KCO_1 的餘弦等於 $KC:\frac{1}{2}AB$。我們得到：在圓周上作匀速运動的點，它的速度在竪直方向的量是

$$w\cos\beta=\frac{AB}{2}\cdot\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot\frac{KC}{\frac{1}{2}AB}=\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot KC=MP.$$

於是得出一个非常好的結果：当點在圓周上作匀速运動時，它在竪直綫上的射影和在擺綫上滑動的點在竪直綫上的射影相同。在任何時間，这兩个的速度在竪直綫上的射影都是相同的。从这裏就可以推出，點在圓周上从 B 到 A，和小球在擺綫上从 M_1 到 A 所花的時間相同。这一段時間的值很容易求出來。我們已經說过，點在補助圓上每秒轉 $\sqrt{\frac{g}{a}}$ 弧度，換句話說，就是轉一个弧度需要花時間 $\sqrt{\frac{a}{g}}$ 秒，轉 π 弧度（半个圓周）需要的時間是 $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ 秒。我們的小球在擺綫上从點 M_1 滑到點 A 需要的時間也正是这麽多，也就是等於 $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ 秒。同样小球按照运動慣性升到 M_1' 需要的時間也是这麽多；同

样，再由 M_1' 滑到 A 點以及由 A 點回升到原來的出發點（點 M_1）需要的時間也都各等於 $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ 秒。这就是說，小球完成一次擺動需要的時間（擺動週期）等於 $4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$：

$$t = 4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

这是一个非常有名的公式。从这裏就可以知道，小球在擺綫形槽軌上运動的週期完全決定於槽軌的尺寸（擺綫母圓的半徑）和重力加速度。擺綫上 M_1 點的位置以及这點到直綫 M_0M_0' 的距离的大小根本不起什麼作用。無論小球从擺綫上的那一點開始运動，擺動週期總歸是同样的。

所以才把擺綫叫做"等時曲綫"——陶塔赫隆娜曲綫。

暫時忘掉所談的擺，並請看圖96。圖上画的是一座冰山，不过並不是普通的冰山，它的凹面变成擺綫的形狀。在不同的高度（K,H,P 點），各有一準备出發的雪橇。一發号令他

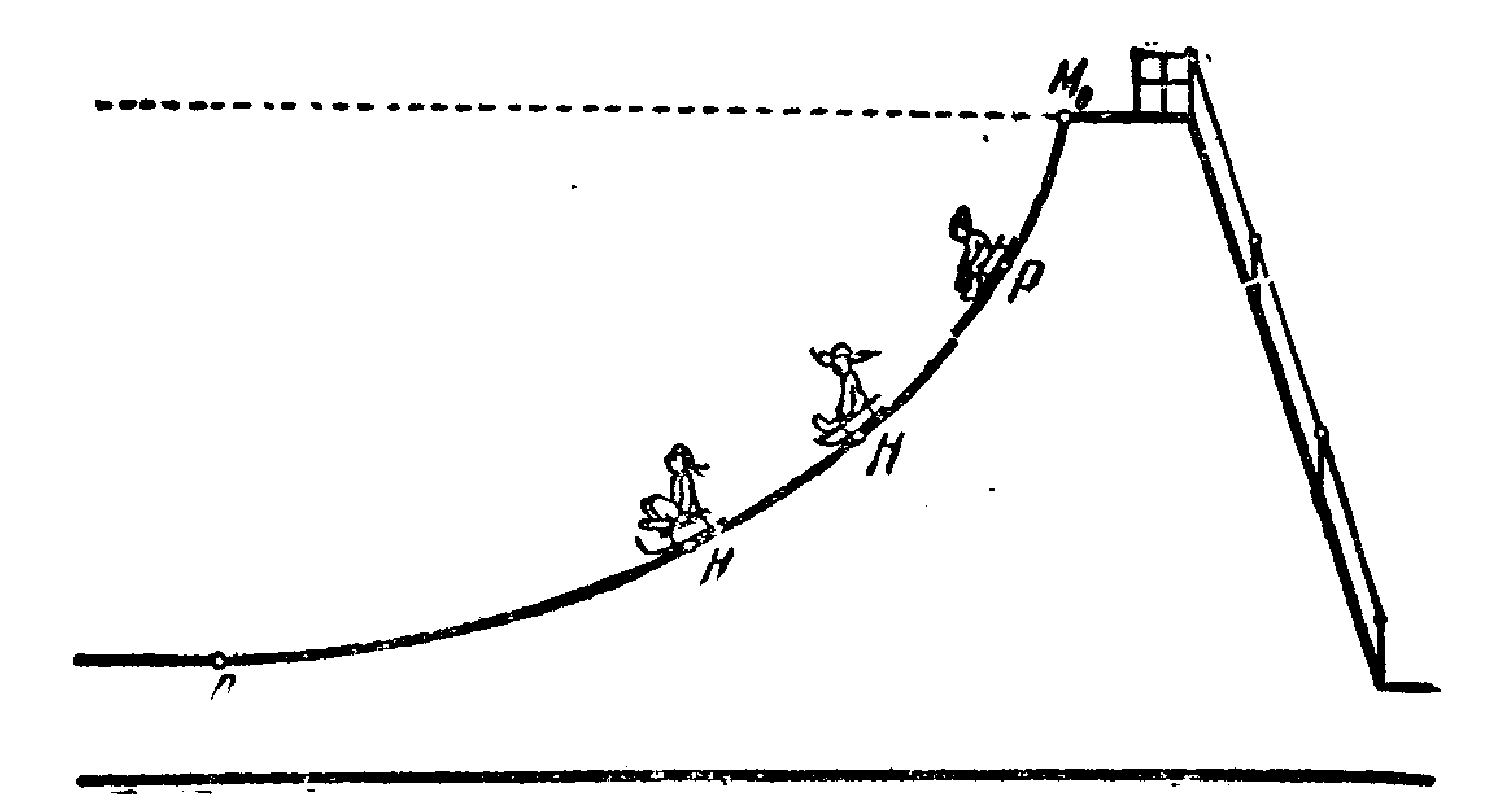


圖96. "等時曲綫"形冰山

們就同時出發。哪一个最先達到目的地呢？不要急於回答，也不要忙着給"运動員"K戴上月桂冠㊀。好好記住現在談的是在擺綫上的运動。那麼你就明白，三个人將同時到達A點：当然不可避免地要發生可怕的碰撞。

擺綫擺

惠更斯想，怎麼样利用擺綫的等時性來裝置"完善的"擺呢？普通擺的作法很簡單：只要把一个相当重的小球繫到綫上掛起來（圖97）。於是擺的重心就在圓周上运動。綫有時候可以換成一条堅固的細軸。但是怎样才能够不用槽軌或類似的具有很大摩擦力的裝置而使得擺上小球的运動軌跡是等時曲綫呢？怎样能夠使綫上繫的小球在擺綫上运動呢？思索这个問題，惠更斯想到了漸屈綫和漸伸綫的概念。

圖97．圓周擺

作一对凸形板（比如說，可以用木板來製），每一塊都割成擺綫的半个拱弧的形狀，在它們共同的歧點O相接（圖98）。像平常一样，用a表示擺綫母圓的半徑。凸形板豎直地固定起來，在歧點O处掛綫，綫長等於$4a$——就是說兩倍於擺綫母圓的直徑。在綫的自由端T繫上有重量的小球。

我們已經講过漸屈綫和漸伸綫了，因此現在就很清楚，小

㊀ 月桂冠是古希臘和罗馬对詩人、藝術家等榮譽的象徵。——譯者註

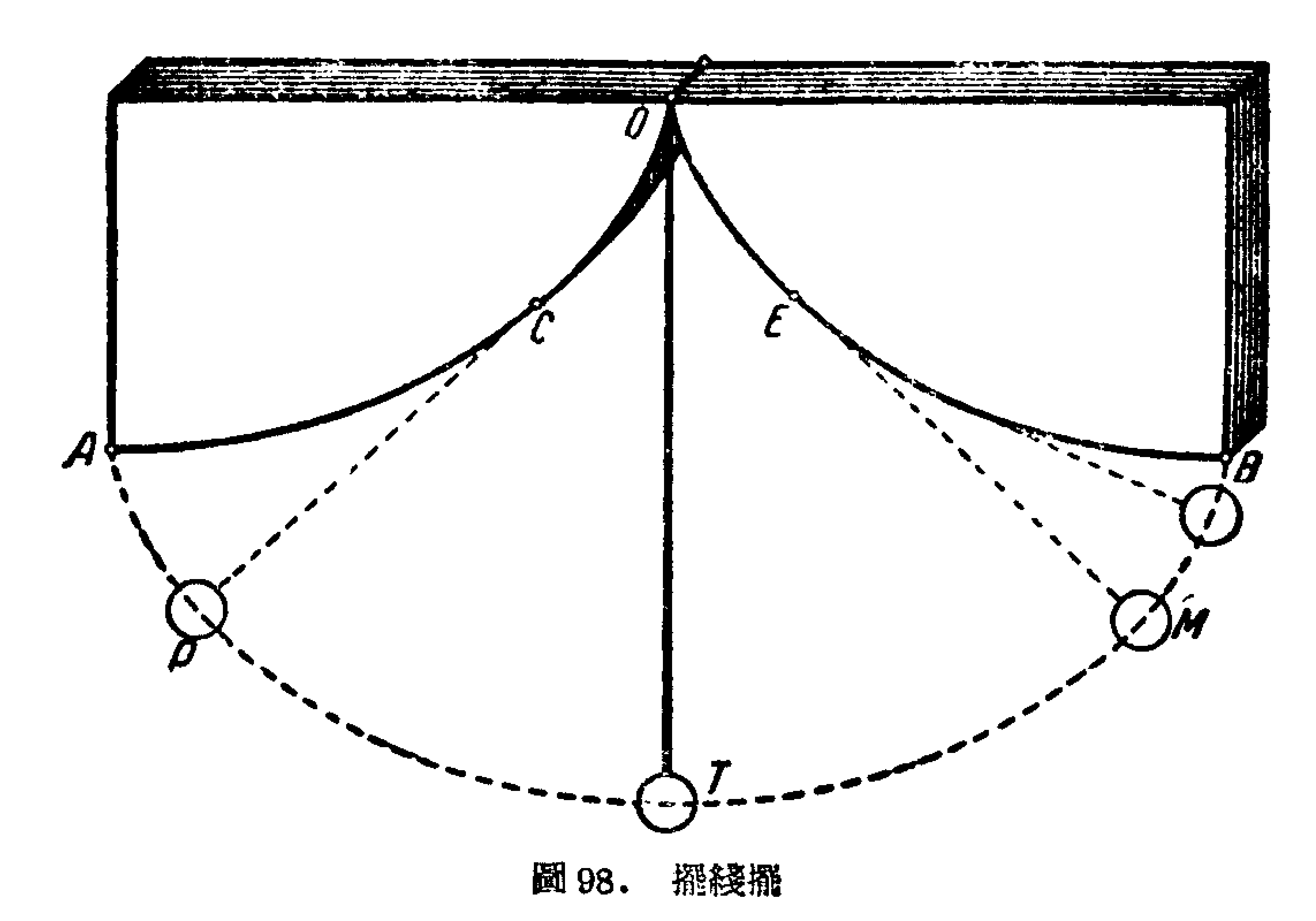


圖 98. 擺綫擺

球在运動時画出的軌跡將是擺綫 $ACOEB$ 的漸伸綫，因为当小球运動時，細綫將貼緊着凸形板的弧（試比較圖 98 和第 88 頁上的圖 89）．但是我們知道，擺綫的漸伸綫是和它自己同样的一条擺綫．这就是說，**小球运動的軌跡曲綫 $BMTPA$ 是一条擺綫，它的母圓半徑是 a．**

如果把小球放在任意一點 M 上，然後放手讓它自由运動，它將開始擺動，而这个擺動的週期是和 M 點的选擇沒有關係的．即或由於摩擦力或空气阻力的影响，擺幅縮小了，擺動週期也仍舊不变．擺就真正地成等時擺了！讀者想一下，怎麼样用这种擺來調節鐘錶的走動．

現在还請看一下擺在擺綫弧 AB 上作很小擺動時的情形（圖 99）．如果这种擺動很小，凸形板的控制影响实际上就不大会受到，这時候，擺綫擺幾乎和長 $l=4a$、吊在 O 點的普通

擺沒有什麼區別。擺綫擺的軌跡 AB 实际上和長是 $4a$ 的圓周擺的軌跡 CE 沒有區別。这就是說，長 $l=4a$ 的普通圓周擺，当在很小的擺動時，它擺動的週期实际上和擺綫擺的擺動週期沒有區別。在我們前面已經介紹过的公式：

$$t=4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

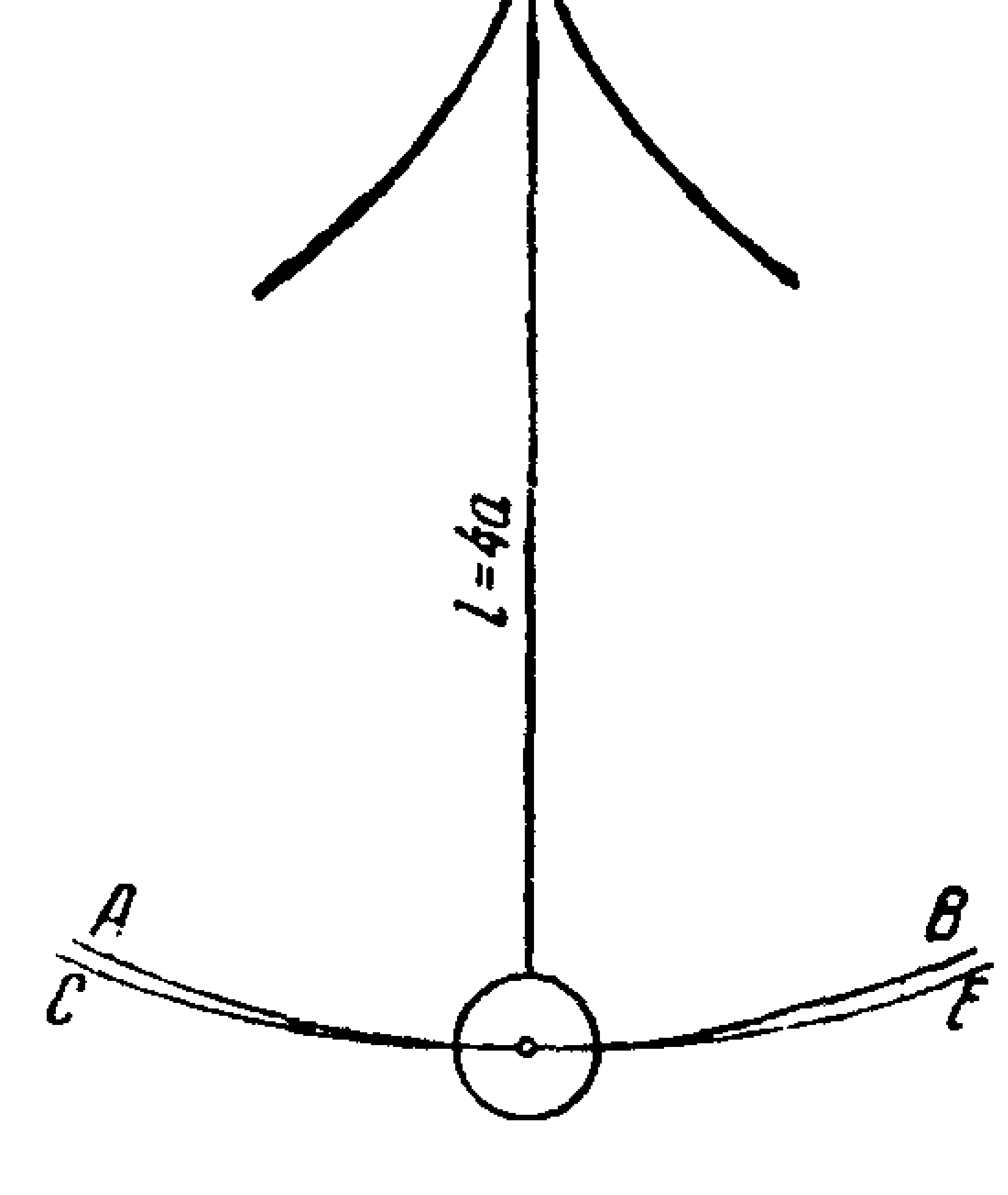
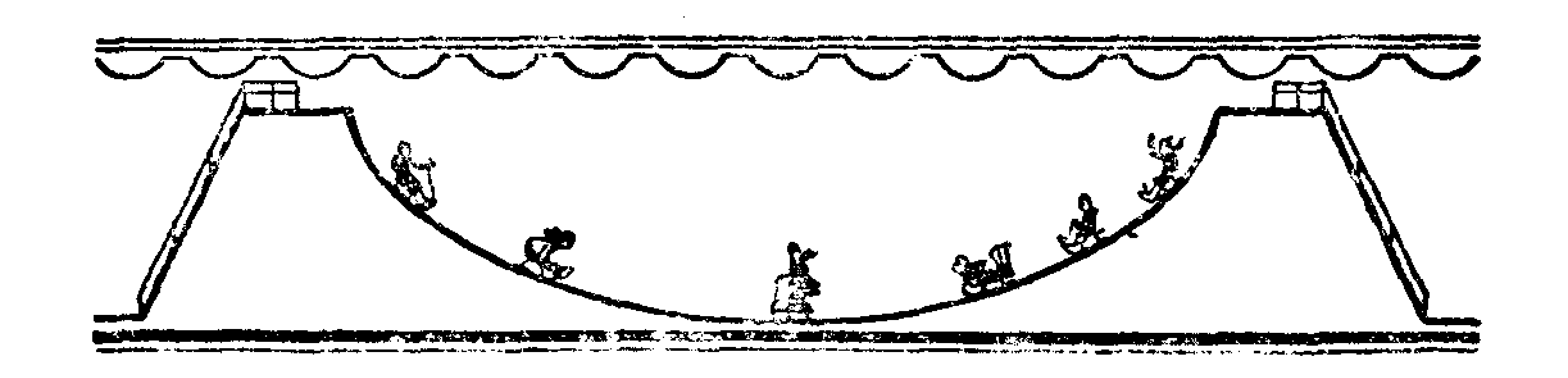


圖 99. 圓周擺的很小的擺動

裏，把 a 換成和它相等的數量 $\frac{l}{4}$，就得到当很小的擺動時圓周擺擺動週期用擺的長度來表示的公式：

$$t=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

这个物理公式是每一个中学生都知道的。



第 六 章

奇妙的冰山

庭院裏面高高地聳立起一座冰山！

别洛烏索夫

關於最速降綫問題

在圖 96 裹（第 98 頁）画了一座奇妙的冰山：运動員們从不同的高度出發，可是同時到達山脚下．但是除此以外，这座冰山在其他方面还可能更奇怪，至少數学家和物理学家們会这样想．对於这种山的研究曾在科学史上起过重要作用，所以我們要講一講．

很坦白地說：我在幼年時代头腦裏从來也沒有想过这样的問題——为了用最短的時間从 M_0 滑到 A，冰山的形狀应該是怎样的（圖 96）？当然，最短的路程是直綫 M_0A．因此也就应該照直綫滑吧！很可能讀者們也会感覺这个問題太顯然了，沒有什麼趣味吧？但是事实上却远不是这样．在这裏我們碰到了一个在數学史上非同等閒的問題，所以要比較詳細地講一下．

請看三角形 ABC（圖 100）。它的斜边 AB 是冰山面，長度等於 20 公尺，高 $BC=12$ 公尺。計算一下雪橇从冰山的頂點 B 滑到山脚 A 所需的時間。这裏也像平常那样，不計算摩擦力。

經过細心观察，伽利略得出下列的定律：如果物体在斜面上运動時所受的外力只有重力，那末运動路程的長度和時間的比，等於下降的高度和自由落体降落該高度所需時間的比。这种敍述方式可以换成另一个內容完全一样的敍述方式：在重力作用下，斜面上物体滑動一段路程所需的時間，等於自由落体降落同样高度所需的時間除該斜面和水平面夾角的正弦。讀者不难証明这兩种敍述的內容是完全一致的：只消在圖 100 上看一看就明白了。

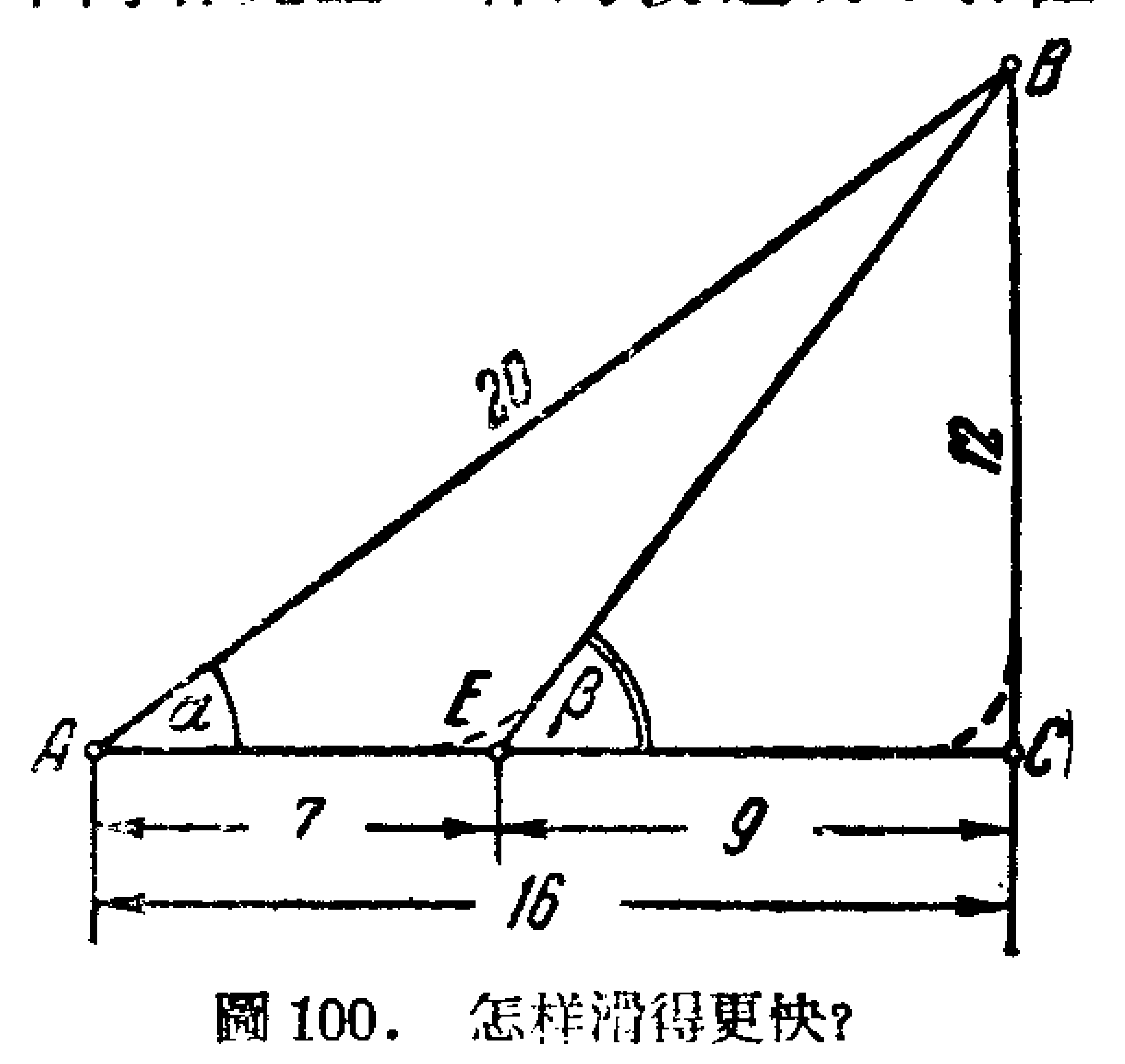


圖 100. 怎样滑得更快？

伽利略是根据經驗得出这条定律來的。但是利用力的分解法則，从自由落体定律很容易推演出这条定律來。㊀

因此，我們可以从計算自由落体从 B 點落到 C 點所需的時間開始。我們知道，自由落体的运動路程 BC，可以用重力加速度（$g=9.81$ 公尺/秒²）和時間 t 來表示：

$$BC=\frac{1}{2}gt^2.$$

㊀ 在中学物理課本裏就有这种推演。

从这裏就得出時間

$$t=\sqrt{\frac{2BC}{g}}=\frac{1}{\sqrt{g}}\cdot 2\sqrt{6}=0.32\times 4.90=1.57,$$

这是因为

$$\frac{1}{\sqrt{g}}=\frac{1}{\sqrt{9.81}}=0.32,\quad 而\ 2\sqrt{6}=4.90.$$

現在不難求出物体在斜面上滑下來所需要的時間 T：要得到这个，只要已求得的時間 t (1.57) 除 α 角的正弦 $(\frac{12}{20}=\frac{3}{5})$，或者 t 乘 $\frac{5}{3}$ 也一样。

我們得到：

$$T=1.57\times\frac{5}{3}=2.61.$$

因此，雪橇从山上滑下來需要 2.61 秒。

其次再看，設使雪橇从 B 滑到 A 並不是沿着 BA 山坡滑、而是沿着一条比較複雜的路徑來滑的情况。它們首先沿着一个更陡些的山 BE 滑下來，然後在 EA 一段路程上用滑到山底時的終速度作慣性运動（这很容易算出）。在这条路徑中，从 B 點到 E 點所需的時間等於从 12 公尺高度自由落下所需的時間除 β 角的正弦（乘 $\frac{5}{4}$），也就是等於 $1.57\times\frac{5}{4}=1.96$ 秒。这个時間还应該加上按慣性而运動（在綫段 $EA=7$ 公尺）所需的時間。雪橇到達 E 點時具有的速度可以从損失的位能 (mgh) 等於獲得的動能 $(\frac{mv^2}{2})$ 的公式算出來：

$$mgh=m\frac{v^2}{2}.$$

这个方程式消去了 m，得到：

$$\frac{v^2}{2}=gh,$$

因此

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{g}\cdot\sqrt{24}\text{公尺/秒}.$$

要算出雪橇按慣性运動以後从 E 點到 A 點所需的時間，只須路程(7 公尺)除速度($\sqrt{g}\cdot\sqrt{24}$) 就行了；因为按慣性的运動是勻速运動：

$$t_{EA}=7\div v=\frac{7}{\sqrt{g}\cdot 2\sqrt{6}}=0.32\times\frac{7}{12}\times\sqrt{6}$$
$$=0.46.$$

把沿山坡 BE 滑落所花的時間 (1.96 秒) 和按慣性而运動所花的時間 (0.46 秒) 加起來，就得到沿路綫 BEA 运動總共花去的時間。它等於 1.96+0.46=2.42 秒，也就是說，比沿山坡 BA 滑落所需的時間少。虽然直綫 AB 是 A 點和 B 點間最短的路程，但是却不是"最節省時間的"路綫：从節省時間的观點來看，路綫 BEA 來得"比較短些"。这也很明顯地表示出：由於山坡坡度增大而在速度方面得到的好处，足够抵補由於路程增長而受到的損失还有餘。

根据这样的推論就会使人們想到，从時間經济的观點來看也許最適当的路綫是 BCA：先使雪橇沿直立的山壁 BC 落下，再沿着一个小圆坡（在圖 100 上用虛綫画出）尽可能平滑的改变它的运動方向，然後沿着直綫 CA 保持着較大的速度按慣性而运動。

我們不必多猜，最好还是实际來算一算！沿 BC 自由下落所需的時間我們已經算过了；这就是我們的 t，等於 1.57

秒．在 C 點的速度可以从比較損失的位能和獲得的動能算出：它等於 $\sqrt{g}\cdot\sqrt{24}$，我們也已經算出了．路程（16 公尺）除速度，得到時間 t_{CA}：

$$t_{CA}=16\div(\sqrt{g}\cdot\sqrt{24})=0.32\times\frac{4}{3}\times2.45=1.04\text{ 秒}.$$

把这个時間和自由下落所需的時間（1.57 秒）加起來，就得到沿路綫 BCA 而运動總共所需的時間：

$$t_{BCA}=1.57+1.04=2.61\text{ 秒}.$$

这一条路綫並不經济：走这条路綫需要花的時間也和走直綫 BA 一样多，也就是說，顯然比走路綫 BEA 需要花的時間來得長些．在我們考慮的三条路綫裏面，要算路綫 BEA 最節省時間（虽然並不是最短）．

但是，E 點（圖 100）是"最適当的"點嗎？它能够保証最節省時間嗎？是不是可以找到某一點 M（圖 101），使沿着圖上用虛綫（－－－－）画的路綫 BMA 而运動花的時間还要少些？又是不是可能，路綫的轉折點不在直綫 CA 上而在三角形 ABC 內，像圖上用虛綫（—•—•—）画的路綫 BDA 那样，將是最節省時間的路綫呢？最後或者，是不是圖上用虛點（……）画的曲綫正是我們問題的解答？怎样去找出这种曲綫？

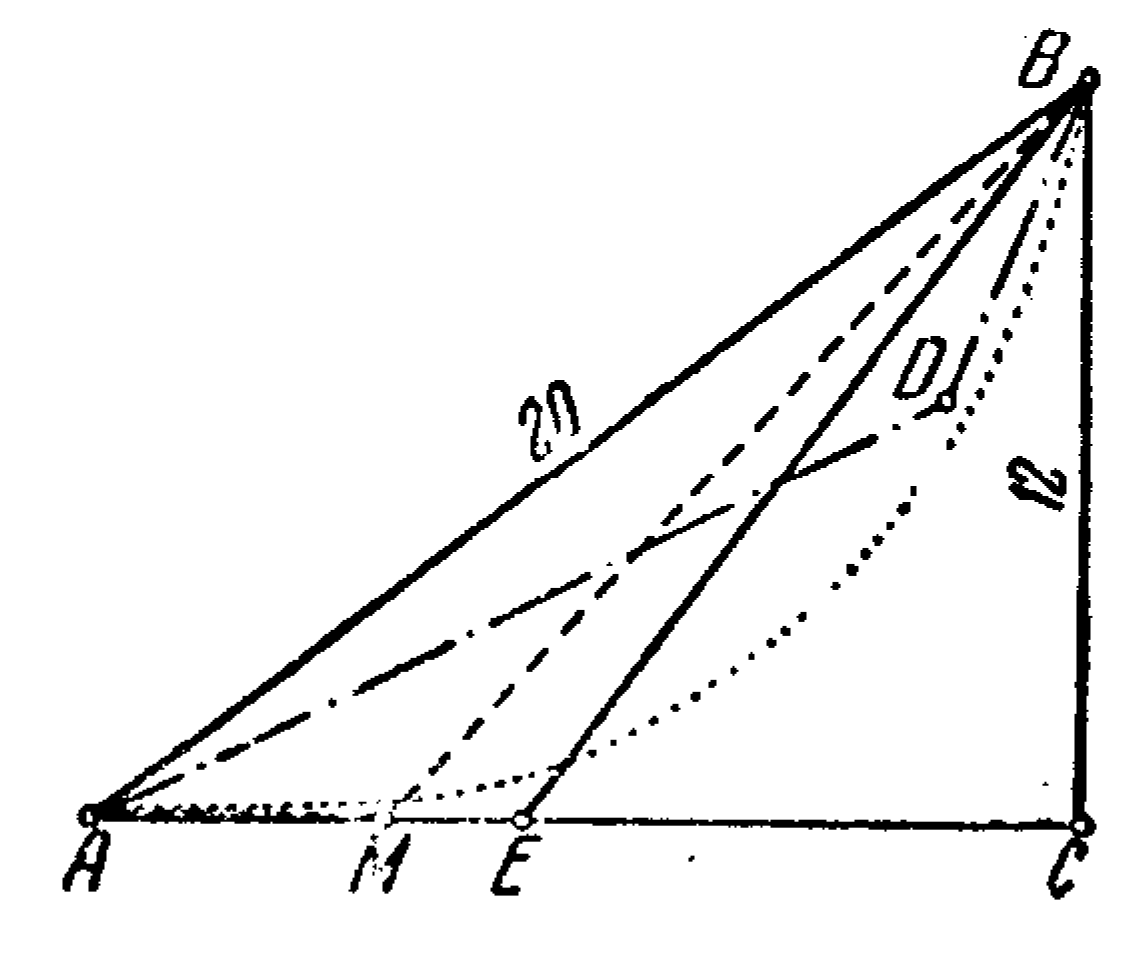


圖 101．怎样选擇路綫？

總之一句話，產生了下面一个問題：設 A, B 是距地面不同高度的兩點，通过这

兩點求作曲綫，使物体在重力作用下从 B 至 A 沿这条曲綫运動花的時間最少。所求的曲綫叫做“最速降綫”。如果 B 點和 A 點在同一条豎直綫上，那末最速降綫顯然是一个直綫段。但是如果 B 點和 A 點不在同一条豎直綫上，如果它們的位置關係恰好像上面問題裏的三角形所示，那麼情形又將怎样呢？在这种情形，問題就不很明顯了，因此，我們要仔細研究一下最速降綫。

到現在为止我們提到过的学者有伽利略、巴斯噶、罗别尔瓦里、托里拆利等人，这些人的研究結果替牛頓和萊布尼茲微積分学的建立做好了準备。著名的伯努利兄弟：雅可布（1654–1705）和約翰（1667–1748）是另一代的学者，他們首先評定了牛頓和萊布尼茲的新方法，指出新方法是有力的、美妙的，对它大力地進行了研究，並把它的应用範圍擴大。他們也是最先鼓吹數学中新思想的人，是微積分学的第一批宣傳者。“積分”这一个名詞就是雅可布·伯努利引入的。

1696 年約翰·伯努利提出了最速降綫的問題。下面我們來說一下这个問題究竟难在哪裏，为什麼說它很有意思。当時約翰·伯努利發表了这个沒有作出解答的問題，請最优秀的數学家們來研究它。有四位学者解决了这个問題——萊布尼茲，牛頓，德-罗比塔尔和雅可布·伯努利。雅可布·伯努利的解答最有意思，曾經在數学史上起过卓越的作用。

为了分析最速降綫的問題，我們必須向另外一方面看看：必須靠光学的一些帮助。

光学的巡礼．狡黠的光綫

我們來回憶一下最速降綫問題是怎样說的．設 A,B 是处在不同高度的兩个定點，在所有的联結 A,B 的曲綫中选出那样一条來，使任意一點㊀在重力作用下沿着它从高點到低點所花的時間最短．

这个問題很难．先考慮下面一个比較容易的問題：假設要从 A 船（圖 102）派遣一位通訊員到 B 城去．小艇的速度是 v 公里/小時，通訊員步行的速度是 w 公里/小時．設距离 a,b,m 已經知道．在 KH 岸上求出一點 M，使通訊員在 M 點登陸、走完路程 AMB 所花的時間最短．

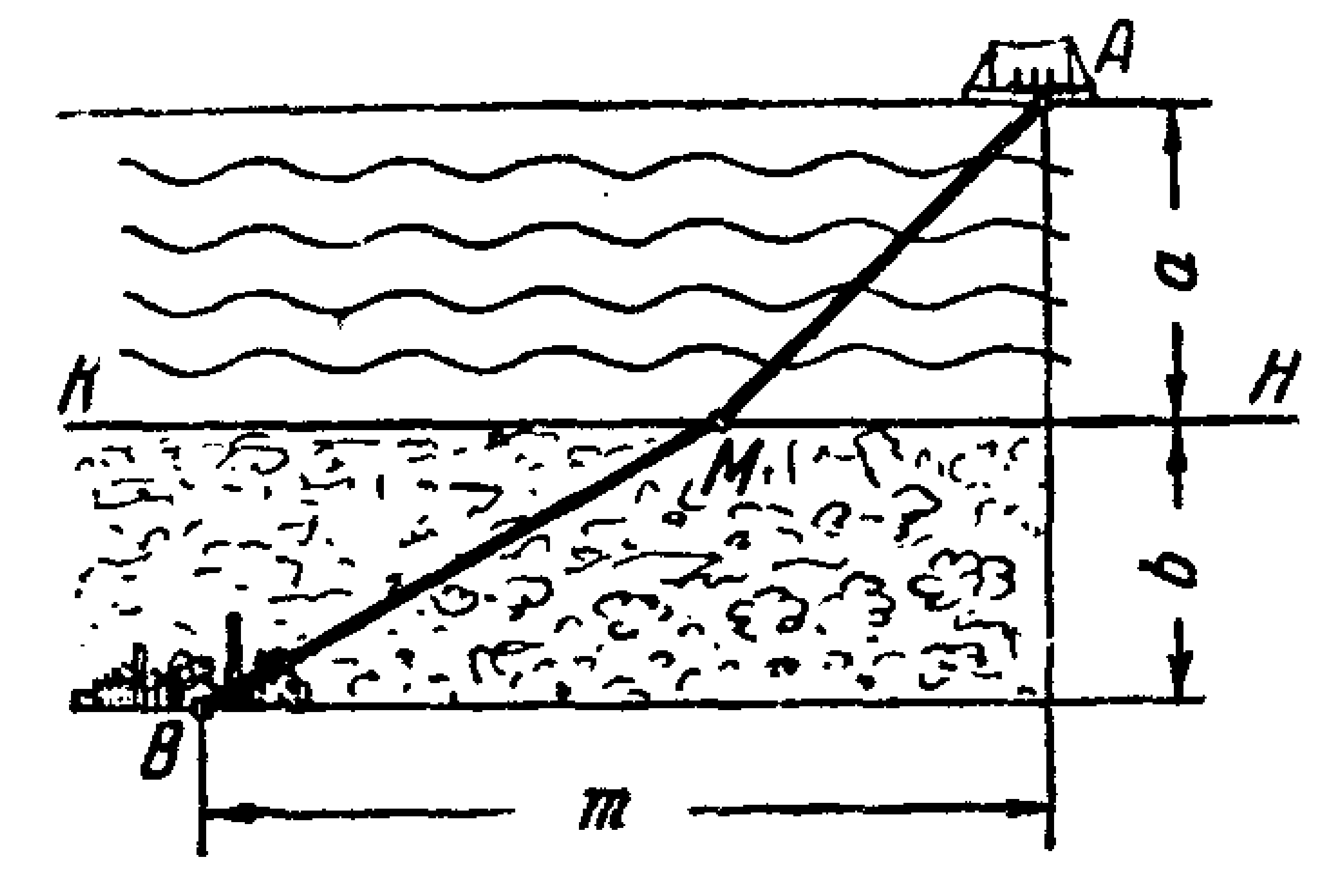


圖 102． 飛馬問題

顯然这个問題和最速降綫問題很接近．但是最速降綫問題要複雜得多：在最速降綫問題裏需要求出的不是一些點，而是整个一条未知曲綫．在新的問題（我們叫它飛馬問題）裏，需要求出的却只有一點．而且在飛馬問題裏，我們碰到的只有兩个速度（v 和 w）的值；在最速降綫問題裏，點的速度受重力的影响而連續地变動，具有無窮多个不同的值．

我們也並不立刻着手解決飛馬問題．首先來看一个大約

㊀ 这裏說的不是純粹幾何意义的點，而是質點——有重量的點。

在兩千年以前，亞歷山大的学者赫倫（公元前一世紀）所从事的問題。

假設你和一羣同伴們在旅行。一部分人紮營在 A 处（圖103），另一部分人紮營在 B 处。假定你在 B 处，水桶却在 A 处。你走到 A 处，拿了水桶然後走向河岸 HK 取了水，回到你的營地 B 处。你应当在河岸上的哪一點 M 取水，方才能够在最短的時間內从 A 处到 B 处？假設你拿着空桶走路和裝水以後走路速度一样，那末物理問題就变成了一个純粹的幾何問題：求由 A 到 B 的最短路綫（中途須折到直綫 HK）。

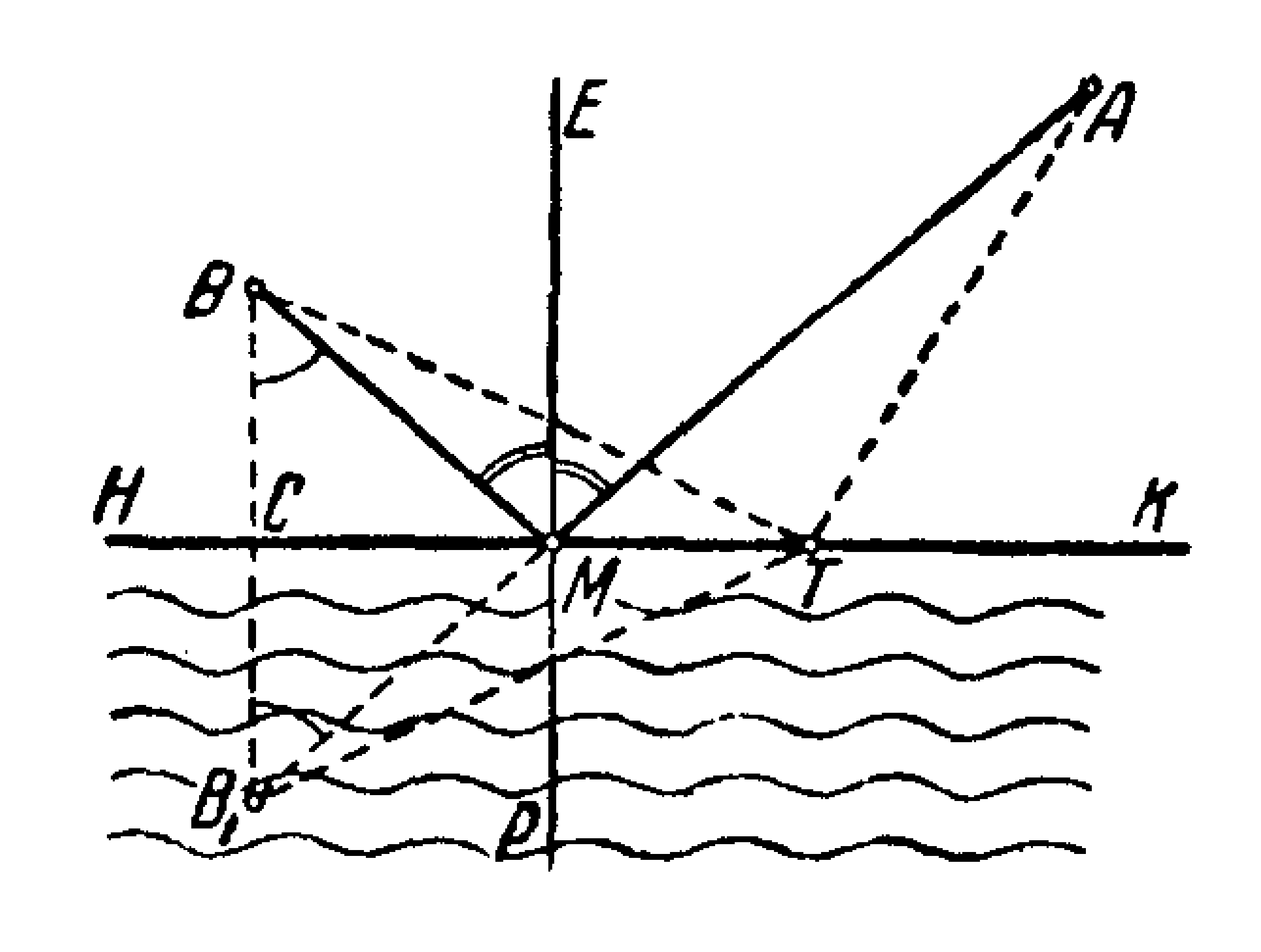


圖 103. 怎样取水花的時間最少？

这个問題可以很簡單地解出。作關於直綫 HK 和點 B 对称的點 B_1（換句話說，就是引 $BC \perp HK$，並沿長 BC，截取 $CB_1 = CB$）。取直綫 HK 上的任意一點 T。很清楚，不管怎样选擇 T 點，折綫 ATB 和 ATB_1 都一样長。和最短的一条 ATB_1 式折綫相应的一条 ATB 式折綫一定也最短。对 ATB_1 式折綫來說，問題很明顯：用直綫段联結 A 點和 B_1 點，“折綫” AMB_1（也就是直綫）就是 A 和 B_1 間的最短距离。这時候最短的 ATB 式折綫（A 點和 B 點在直綫 HK 的同一边）是折綫 AMB，而所求的點正是 M 點（联結 B 點的“像”和 A 點的綫段跟直綫 HK 的交點）。

注意，在这种情况角 BMC 和角 CMB_1 相等（为什麽？）。如果通过點 M 引直綫 $EP \perp HK$，那末角 EMB 就等於角 EMA。

現在我們不去考慮關於河岸和野營的人的事，而來考慮一个鏡面 HK、光源 A 以及观察者的眼睛 B（完全同圖 103 一样）。这時候我們問題的答案变成了一件大家熟悉的物理事实：光綫的投射角等於反射角。这也可以照下面的方式來敘述：光綫反射時"选擇"最短的路程。这个結果最初是亞歷山大的赫倫得到的，所以後边这一形式的反射定律後來就叫做赫倫定律。

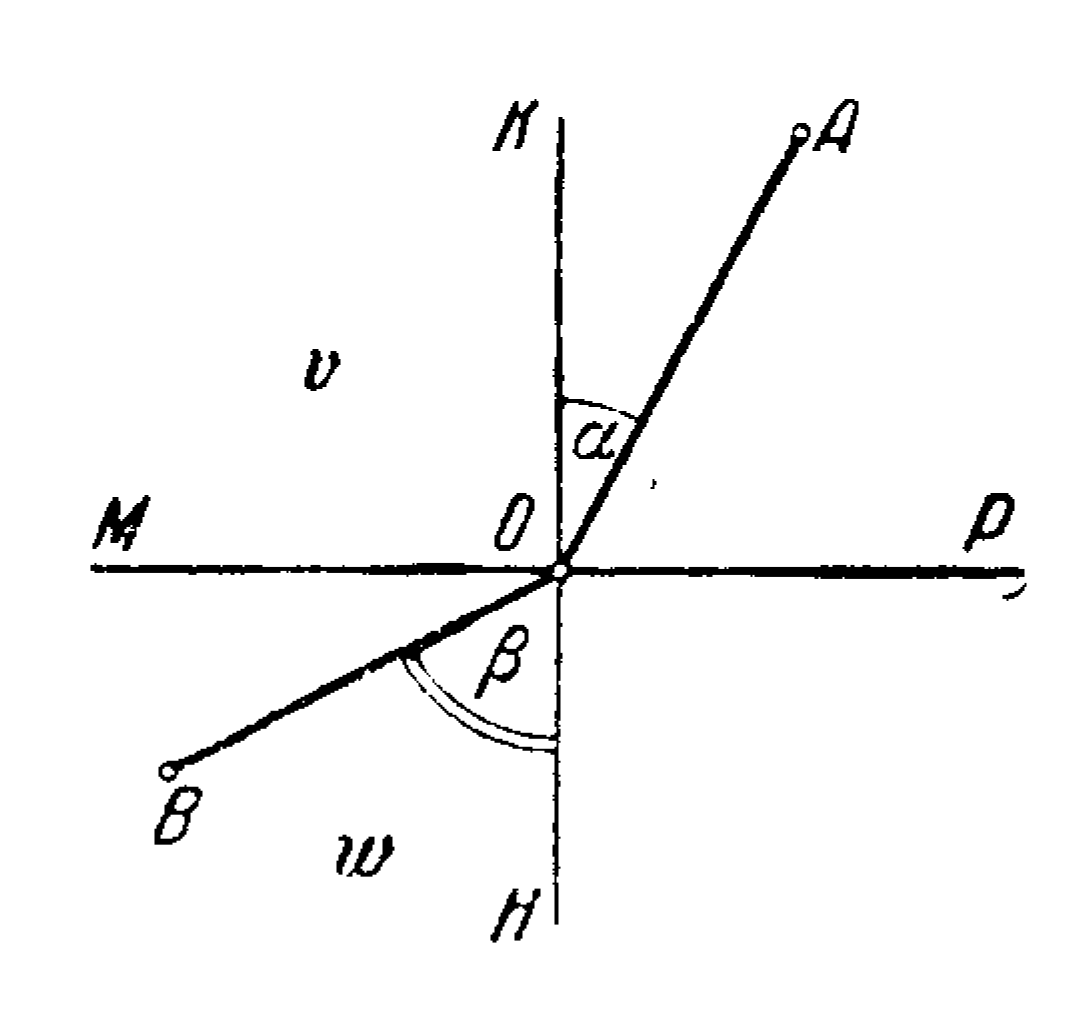


圖 104. 斯涅留斯定律

在赫倫以後一千五百年，發明了顯微鏡和望远鏡。为了要改進这些儀器，人們努力研究了光的幾何学，自然而然注意的中心就不是反射問題而是折射問題（在透鏡方面）了。顯然这時候就不能講光綫的最短路程是 AOB（圖 104）。但是在圖 104 上画的 α 角和 β 角之間的關係怎样呢？——關於这一點，我們只能猜一下。荷蘭的学者斯涅留斯（1581–1626）用实驗的方法發現了一条定律，現在这条定律已經是每个中学生都知道的了：如果光綫从介質 A 射入介質 B，那末投射角的正弦和折射角的正弦的比是一个常數（等於介質 B 的折射率和介質 A 的折射率的比）。文藝復兴後期的学者們就已經知道在不同介質中光

速的差異是由於不同的折射率而引起的．在圖 104 上，設用 v 來表示光綫在上边一部分介質裏的速度，用 w 來表示在下边一部分介質裏的速度，斯涅留斯定律就可以像下面这样敍述：光綫投射角的正弦和折射角的正弦与相应的光速成正比例，寫成式子就是：

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v}{w}.$$

光綫从 A 點經过 O 點到達 B 點，所走的並不是最短的路程．但是可能不可能这样走最快呢？法國学者皮埃尔·飛馬(1601-1665)首先注意到，在關於光綫反射的赫倫定律裏說的並不是路程最短而是時間最短(光綫的投射速度和反射速度是一样的！)．飛馬想到，光綫折射時是不是也会"选擇"最節省時間的路程呢？这就使光綫的反射和折射能够包括在一条統一的定律裏面，这条定律是用新的、更丰富的观念作基礎的！

飛馬提出了这样的一个問題：設在圖 104 上，光綫在直綫 MP 上部的速度是 v，在 MP 下部的是 w；光綫应該怎样运動，才花最少的時間从 A 點走到 B 點？

現在再看圖 102，把飛馬關於光綫的問題和關於輪船派遣通訊員的問題比較一下．立刻可以看出，就數学的观點來看，这兩个問題是同一个問題．正因为这个緣故，我們才把輪船派遣通訊員的問題叫做飛馬問題，虽然这位学者从來沒有考慮过这个關於輪船的問題．我們現在撇開光綫和輪船來講一个抽象的力学問題：設有一个运動的質點从 A 點穿过直綫 MP 而到達 B 點(圖 104)．它在 MP 上部的速度等於 v，在

直綫 MP 下部的等於 w. 問質點穿过直綫 MP 的哪一點 O，得到的由兩个直綫段組成的路程才是最節省時間的路程？

困难在哪裏呢？看这样一个問題：已知一等腰梯形的底、周界和底角，求它的面積．这是一个普通的問題，不太簡單，但也不很难，高中学生都可以解得出來．但是如果把問題改变一下，考慮下面的情形：已知等腰梯形的底和周界，应該怎样选擇底角使所得梯形的面積是最大？这个新問題，一千个中学生裏也难找得出一个能解決的了．

这一類問題（就是尋求使某一數量取極大值或極小值的条件）的实用價值，是很明顯的．在技術中經常需要解決關於鍋爐最經济的尺寸的問題，關於机翼最有效的形狀的問題等等．古代科学差不多沒有处理过这一類問題．但是文藝復兴時代的学者却面对着迫切需要完成的任务：研究出簡單的方法來解決这一類問題——所謂**極大極小問題**．

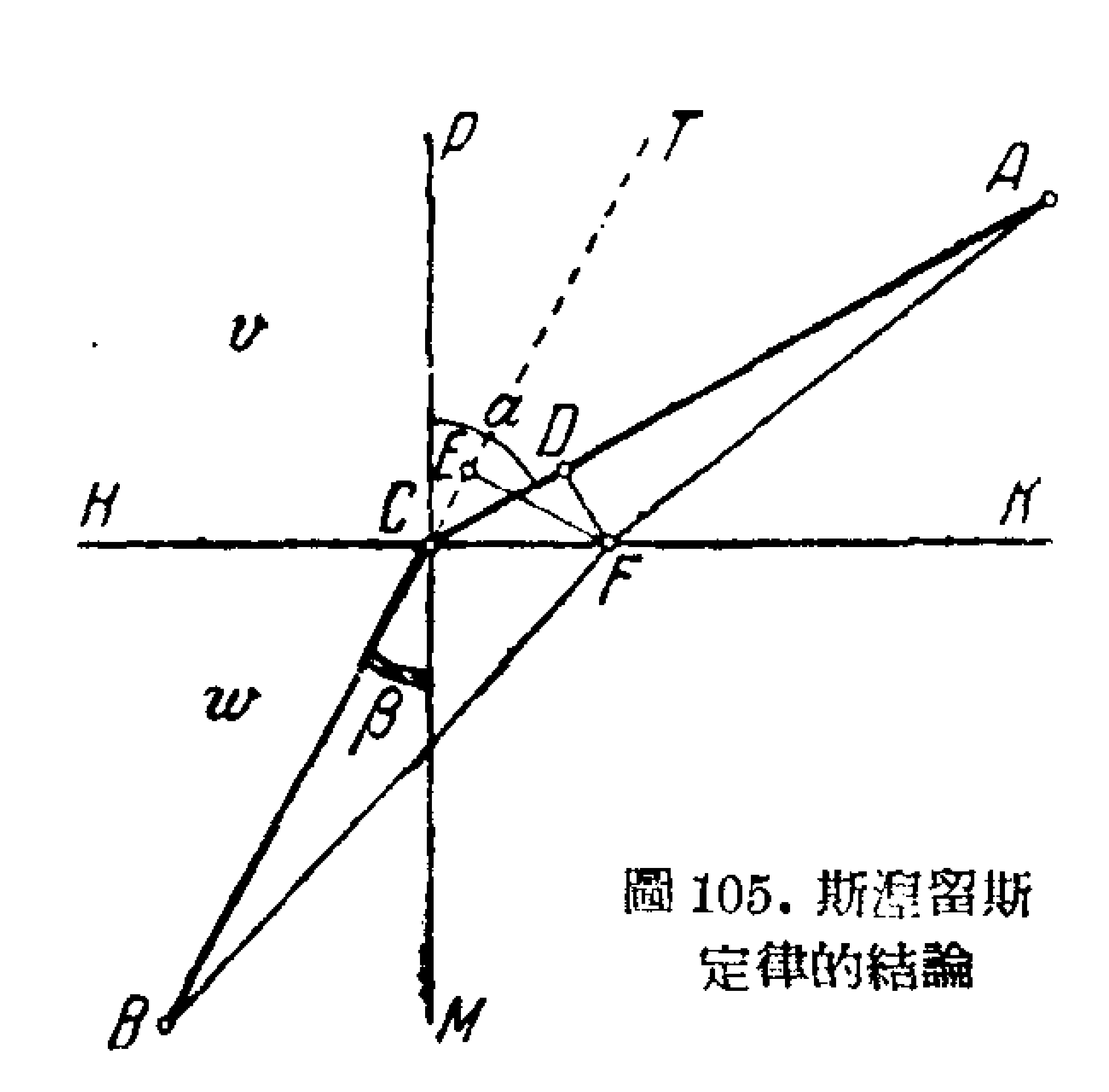


圖 105．斯涅留斯定律的結論

不知道斯涅留斯定律而要解決光綫折射的問題是很困难的．但是如果先允許由經驗發現的斯涅留斯定律來暗示一个解答，就不难証明这个事先的預測是正確的．

我們現在就要來作这一件事．

設質點（或光綫）从 A 點（圖 105）沿直綫运動到達直綫

HK，再从 HK 到 B 點；从 A 點到直綫 HK 的运動速度是 v，从直綫 HK 到 B 點的运動速度是 w. 質點（或光綫）应該在哪一點 C 穿过直綫 HK，才能在最短時間裏由 A 點到達 B 點？我們來証明，最節省時間的路程是角 PCA 的正弦和角 BCM 的正弦的比等於速度 v 和 w 的比的一条路程.

設 ACB 正是这样一条路，就是說它適合条件（圖 105）

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v}{w}.$$

在 HK 上取任意一點 F. 我們來証明，按路程 AFB 走比按路程 ACB 走花的時間要多些.

作一些補助綫，使以後的考慮好比較容易些. 从 F 點引投射光綫的垂直綫，又引折射光綫的垂直綫（这个用光学術語來敍述的解法也適用於解質點运動的那个問題）. 換句話說，就是引 $FD\perp CA$ $FE\perp BT$. 角 DFC 等於角 PCA（角 α），因为它們的边兩兩垂直. 同理，角 CFE 等於角 BCM（角 β）. 因此

$$\sin\alpha=\frac{CD}{CF},\qquad \sin\beta=\frac{CE}{CF}.$$

把这兩个關係相除，倒換位置，並回憶（根据斯涅留斯定律）$\sin\alpha:\sin\beta=v:w$，我們得到

$$\frac{CD}{CE}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v}{w},$$

或

$$\frac{CD}{v}=\frac{CE}{w}.$$

这就是我們需要得到的初步結果. 現在再把按路程 ACB 走和按路程 AFB 走所需的時間作一个比較.

按路程 ACB 走：

$$t=\frac{AC}{v}+\frac{CB}{w},$$

而按路程 AFB 走：

$$t_1=\frac{AF}{v}+\frac{FB}{w}.$$

(在直綫段上决定勻速运動所需的時間，只要路程除速度就行了.)

必須証明 $$t<t_1,$$

也就是 $$\frac{AC}{v}+\frac{CB}{w}<\frac{AF}{v}+\frac{FB}{w}.$$

現在把 t 的表示法变换一下. 用和 AC 相等的量 $AD+DC$ 來代替 AC，得到：

$$t=\frac{AD+DC}{v}+\frac{CB}{w}=\frac{AD}{v}+\frac{DC}{v}+\frac{CB}{w}.$$

把$\frac{CD}{v}$用和它相等的量$\frac{CE}{w}$來代替，得到：

$$t=\frac{AD}{v}+\frac{CE}{w}+\frac{CB}{w}=\frac{AD}{v}+\frac{BE}{w},$$

因为 $CE+CB=BE$.

只剩下最後一步了. 比較綫段 AD 和 AF. 前者和 DF 垂直，後者和 DF 斜交. 因此，$AD<AF$. 同理，$EB<BF$. 既知 $AD<AF$，那末 $\frac{AD}{v}<\frac{AF}{v}$. 同理，$\frac{BE}{w}<\frac{BF}{w}$. 我們得到最後的結果是：

$$\frac{AD}{v}+\frac{BE}{w}<\frac{AF}{v}+\frac{BF}{w},$$

也就是 $$t<t_1.$$

这样，我們就証明了按路程 ACB 走比按隨便哪条路走花的時間都要少. 關於光綫投射和折射的定律已經証明了. 我們也正好为解决最速降綫問題作好了準备.

再談擺綫

我們來回憶一下最速降綫問題的提法．在重力作用下的質點，按照怎样的曲綫作运動，才使由 A 點到達 B 點（圖 106）花的時間最少？在飛馬問題裏，需要決定的是單独一个點的位置，可以使所考慮的量（時間）達到最小值．在其他和飛馬問題類似的問題裏，需要尋求的是某一个量的一个數值，使某量取这个數值時，另一个量達到最大值或最小值．在約翰·伯努利問題裏（我們还記得，最速降綫問題是伯努利提出的），情形就完全不同：需要決定的不是一个點甚至於十个點的位置，而是一个形成連續曲綫的無窮點集的位置．在这裏，不僅僅飛馬的方法用不上，就是在伯努利時代已經產生的微分学也不够用．这就是最速降綫問題非得要像伯努利这样著名的現代学者才能解決的緣故．

雅可布·伯努利的解法虽然在当時是最完善的，但畢竟还不十分嚴格．後來人們对於改良这个解法以及把它应用到其他問題所作的种种努力，使十八世紀產生了一門全新的數学——变分学．正是这个緣故，所以我們在第 107 頁上說，最速降綫問題在科学史上起过重要的作用．

以下就來講雅可布·伯努利的解法．他開始先把这个比較难的問題換成許多簡單的——初等的——問題．他把 A 點和 B 點（圖 106）高度的差分成許多相等的部分，設想通过各分點引許多互相平行的平面．这样就把整个空間"切成了"許多薄層．設每一層的厚度是 c，總的層數是 n（圖 106），那末

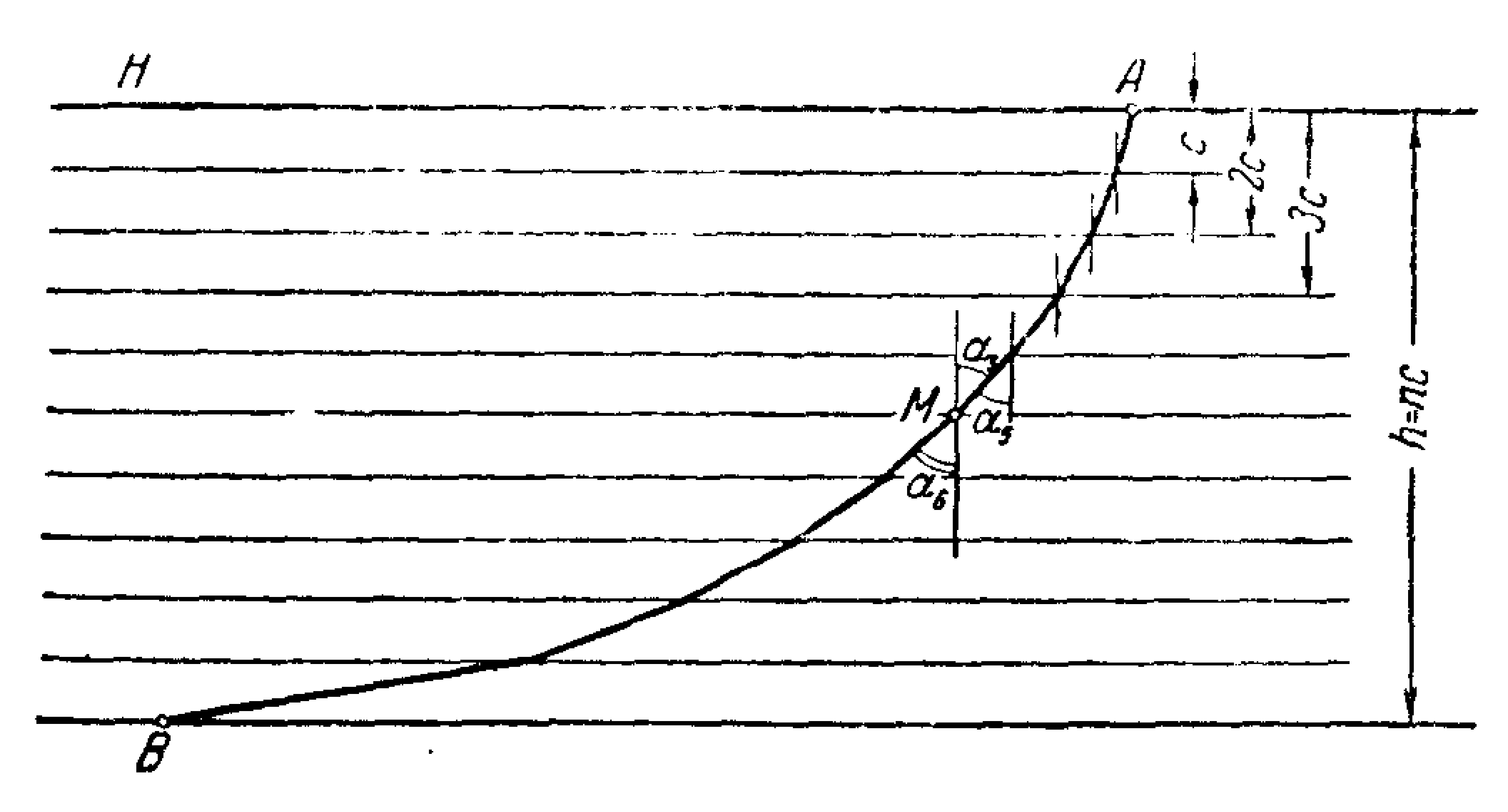


圖 106. 最速降綫問題

顯然地，乘積 nc 等於 h——A 點和 B 點的高度差。

現在假設質點的速度並不是連續变動的，而是跳動地变動的——从一層到另一層時才变動的。这样，在第一(頂上)層裏質點的速度 $v_1=\sqrt{2gc}$，这就是在重力作用下質點到達第一層下边時的速度。在第二層裏質點的速度 $v_2=\sqrt{2g\cdot 2c}$，这就是質點到達第二層下边時的速度。現在就很清楚地可以看出，在每一層裏質點的速度是什麽。例如，在第四層裏，速度 $v_4=\sqrt{2g\cdot 4c}$，等等。質點在重力作用下在折綫上运動，当 n 很大(每一層的厚度因而很小)時，运動非常接近於在多边形軌道上的自然运動。要定出表示質點近似"跳動"运動路程的折綫，只要決定在折綫每一頂點的交角就行了。

其实也只需決定折綫的每一段和豎直方向所成的角度就可以了：这些角度適当地記作 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等等，字母右下角的号碼指明角度是第幾層的(圖 106)。

看一下質點在兩層交界处的情況，例如，在第五、第六兩

層的交界处．对於在其他任意相鄰兩層交界处的考慮和結果也同这裏一样．为了使質點通过第五和第六層花的時間最少，上述角度 α_5 和 α_6 的正弦的比一定要等於在第五層的速度和在第六層的速度的比（飛馬問題的条件滿足了，因此就可以对質點用斯涅留斯定律了）．因此，应該有下列關係：

$$\frac{\sin\alpha_5}{\sin\alpha_6}=\frac{v_5}{v_6}$$

但是 $v_5=\sqrt{2g\cdot5c}$，$v_6=\sqrt{2g\cdot6c}$，因此

$$\frac{\sin\alpha_5}{\sin\alpha_6}=\frac{\sqrt{2g\cdot5c}}{\sqrt{2g\cdot6c}}=\frac{\sqrt{5c}}{\sqrt{6c}}.$$

上面的式子也可以寫成：

$$\frac{\sin\alpha_5}{\sqrt{5c}}=\frac{\sin\alpha_6}{\sqrt{6c}}.$$

对於每一对相鄰的兩層重複類似这样的推論，我們得到一串等式：

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{c}}=\frac{\sin\alpha_2}{\sqrt{2c}}=\frac{\sin\alpha_3}{\sqrt{3c}}=\frac{\sin\alpha_4}{\sqrt{4c}}=\cdots\cdots\text{等等}.$$

換句話說，折綫任一綫段和豎直方向交角的正弦，跟相应的層到頂平面（圖 106 上的 AH 平面）距离的平方根的比，等於一个常數．所求的“最節省時間的折綫”現在就完全決定了．它可以从第一段起，一段一段地作出來．

按雅可布·伯努利的方式，我們把各層的厚度 c 無限度地变薄，使層的數目無限度地增多．那末折綫形的路程就趨近於我們所求的極限曲綫——最速降綫，問題也就得到解決了．

这時候折綫每一段的方向变成了什麼呢？它們就变成所求曲綫的切綫方向．因此，在最速降綫的任意一點，切綫和豎

直方向所成角度的正弦，和“高度”(这一點到水平面 AH 的距离)的平方根的比是一个常數.

但是这个性質正好是擺綫的特徵之一. 回憶一下第 26-27 頁的定理 4 和定理 5. 一条曲綫，假使在它的任意一點，切綫方向和此點到某定直綫的距离之間存在着像上面所說的这种關係，就不会是其他的曲綫，一定是我們的老朋友——擺綫. 它不僅是等時曲綫，並且还是最速降綫.

当然，雅可布·伯努利的解答是不完备的. 在这种情形下由折綫取極限而过渡到曲綫是否正確，还是不很清楚的. 还有其他的在邏輯上馬虎的地方. 但是雅可布·伯努利的特別的發明天才和智慧却是不容否認的. 这个解答所蘊含的基本观念的發展，在十八世紀導致了变分学的產生.

結　語

我們來總結一下．我們介紹了一条在許多方面都很重要的曲綫．它是滚動着的車輪輪緣上面的點的軌跡，它也是等時曲綫（等週期振動的曲綫），它又是最速降綫． 然而这些还不够．在我們的時代，擺綫形曲綫应用在許多技術計算中，这种曲綫的知識簡化了机器零件的研究．我們不再細說了，只是提一下，在設計齒輪的齒的断面的時候，以及在其他許多技術問題上，都利用到擺綫形曲綫．即使从純粹实用的观點來看，这种曲綫也值得特別加以注意．

然而擺綫也还有別的功績．十七世紀的学者們，在製訂研究曲綫長度的方法（那种方法結果引起了微積分学的發明）時，就利用到它．它也是一种"試金石"，牛頓、萊布尼玆和他早期的追隨者都曾經用它來試驗新的、有力的數学方法的效力．最後，最速降綫問題又引起了变分学的發明，变分学对於現代的物理学家是这样的需要．因此，擺綫是和數学史上一个非常有趣的時期緊密地联系在一起的．